Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
MACS 3
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du mercredi 5 décembre 2012

Durée : 3 h
Une feuille recto-verso de notes manuscrites personnelles est autorisée

Problème
Conduite optimale d'un tramway

La conduite optimale d'un tramway demande de contrôler la position et la vitesse du tramway par l'accélération. Pour éviter les accélérations et les décélérations trop brusques c'est la dérivée temporelle de l'accélération qui est contrôlée, soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad \dot{v}(t) = a(t), \quad \dot{a}(t) = u(t), \quad \text{avec } |u(t)| \leq 1$$

où $x(t)$ est la position, $v(t)$ la vitesse, $a(t)$ l'accélération et $u(t)$ le contrôle.

On souhaite déterminer le contrôle u pour un trajet entre deux stations, soit pour passer de l'état $x(0) = v(0) = a(0) = 0$ à l'état $x(T) = L > 0$, $v(T) = a(T) = 0$.

Questions préliminaires

1. Calcul préliminaire qui pourra servir par la suite :
Soit $t_0 < t_1$ et $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$, $a(t_0) = a_0$, calculez, pour un contrôle constant u_0, les valeurs de $x(t_1)$, $v(t_1)$, $a(t_1)$ en fonction de x_0, v_0, a_0, u_0 et $t_1 - t_0$.

Corrigé : On trouve :

$$\begin{aligned}
a(t_1) &= u_0(t_1 - t_0) + a_0 \\
v(t_1) &= \frac{u_0}{2}(t_1 - t_0)^2 + a_0(t_1 - t_0) + v_0 \\
x(t_1) &= \frac{u_0}{6}(t_1 - t_0)^3 + \frac{a_0}{2}(t_1 - t_0)^2 + v_0(t_1 - t_0) + x_0
\end{aligned}$$

2. Montrez que tout contrôle $u(t)$ menant de l'état initial à l'état final doit vérifier les relations suivantes :

$$\int_0^T u(t)dt = 0, \quad \int_0^T tu(t)dt = 0, \quad \int_0^T t^2u(t)dt = 2L$$

Corrigé : On peut répondre de deux façons à cette question, soit en vérifiant les formules proposées, soit en les retrouvant. La première méthode consiste à faire des intégrations par parties en utilisant les relations du système dynamique. On développe ici la deuxième méthode.

La première relation découle de $0 = a(T) - a(0) = \int_0^T u(t)dt$, pour la deuxième on écrit $0 = v(T) - v(0) = \int_0^T a(t)dt = \int_0^T dt \int_0^t u(\tau)d\tau$ et en permutant les signes somme $0 = \int_0^T u(\tau)d\tau \int_\tau^T dt = \int_0^T u(\tau)(T-\tau)d\tau = -\int_0^T \tau u(\tau)d\tau$.
La troisième relation suit le même raisonnement : $L = x(T) - x(0) = \int_0^T v(t)dt = \int_0^T dt \int_0^t a(s)ds = \int_0^T dt \int_0^t ds \int_0^s u(\tau)d\tau$, en permutant les signes somme
$L = \int_0^T dt \int_0^t u(s)ds \int_s^t dt = \int_0^T dt \int_0^t (t-s)u(s)ds = \int_0^T u(s)ds \int_s^T tdt - \int_0^T su(s)ds \int_s^T dt = \int_0^T (\frac{T^2-s^2}{2})u(s)ds - \int_0^T s(T-s)u(s)ds$ et compte tenu des relations précédentes : $\int_0^T \frac{s^2}{2}u(s)ds = L$.

Première étude - trajet en temps minimum

3. On considère dans une première étude le voyage en temps minimum.
   (a) Donnez le hamiltonien associé au problème de contrôle optimal et les équations de l'état adjoint, discutez les conditions de transversalité.

   Corrigé : En prenant $J(u) = \int_0^T 1dt$, on a $H = 1 + p_1 v + p_2 a + p_3 u$ et $\dot{p_1} = 0$, $\dot{p_2} = -p_1$ et $\dot{p_3} = -p_2$. L'état final étant imposé on a $\eta = 0$, le temps final est libre donc τ est quelconque, d'où la condition de transversalité $H(T) = 0$, qui conduit à $H(t) = 0$, $\forall t$ puisque le problème est stationnaire.

   (b) Montrez, à l'aide du principe du minimum de Pontriaguine, que le contrôle optimal u est bang-bang avec un maximum de 2 commutations.

   Corrigé : Le principe du minimum de Pontriaguine nous dit que le contrôle optimal minimise à tout instant le hamiltonien, c'est donc l'argument du minimum de $(p_3 u)$, pour $-1 \leq u \leq 1$ et donc $u = -\text{sign}(p_3)$. Comme $p_3(t)$ est un polynôme du second degré en t, il ne change de signe que 2 fois au plus , donc au plus 2 commutations.

   (c) En analysant le déplacement et la vitesse du tramway montrez que la séquence des valeurs prises par le contrôle optimal est nécessairement $(1, -1, 1)$, soit :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \tau_1[, \\ -1 & \text{si } t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ 1 & \text{si } t \in [\tau_2, T[, \end{cases}$$

   Corrigé : A $t = 0$ le tramway est à l'arrêt, pour démarrer sa vitesse doit augmenter et donc aussi son accélération qui était initialement nulle, donc au voisinage de $t = 0$ il faut $u = 1$, plus tard u passera à -1 pour diminuer son accélération jusqu'à une accélération négative qui diminuera la vitesse afin de la ramener vers 0, enfin l'accélération doit revenir à 0 en $t = T$ avec une dernière étape avec $u = 1$.

   (d) En vous aidant des résultats du calcul préliminaire, montrez successivement que $\tau_2 - \tau_1 = \frac{T}{2}$, puis que $\tau_1 = \frac{T}{4}$ et $\tau_2 = 3\frac{T}{4}$.

   Corrigé : Pour obtenir ces résultats on peut s'appuyer sur les calculs de la question préliminaire (1) : Le premier résultat s'obtient en calculant successivement $a(\tau_1)$, $a(\tau_2)$, puis $a(T)$ qui doit être nul. Le deuxième résultat s'obtient de la même façon avec la vitesse $v(T)$ qui doit être nulle. On peut alternativement s'appuyer sur les formules de la question préliminaire (2) en calculant $\int_0^T u(t)dt$ et $\int_0^T tu(t)dt$.

(e) En déduire le temps minimum de trajet T_0.

Corrigé : Pour obtenir le temps minimum de trajet T_0 on va imposer que $x(T) = L$. Là encore on peut soit utiliser les résultats de la question (1), soit ceux de la question (2). Avec les résultats de la question (1), on calcule successivement les valeurs de l'accélération, de la vitesse et de la position aux temps intermédiares pour accéder à $x(T)$. On obtient ainsi :

$$a(\frac{T}{4}) = \frac{T}{4} \qquad a(\frac{3T}{4}) = -\frac{T}{4}$$
$$v(\frac{T}{4}) = \frac{T^2}{32} \qquad v(\frac{3T}{4}) = \frac{T^2}{32}$$
$$x(\frac{T}{4}) = \frac{1}{6}\frac{T^3}{64} \qquad x(\frac{3T}{4}) = \frac{11}{6 \times 64}T^3$$

et enfin $x(T) = \frac{T}{32}$ et donc le temps minimum est donné par $T_0^3 = 32L$. Alternativement, avec la question (2), on calculera $\int_0^T t^2u(t)dt$

Deuxième étude - consommation minimale

4. Dans une deuxième étude on cherche, toujours pour le trajet entre deux stations mais pour un temps $T > T_0$ fixé, à minimiser la consommation qui est donnée par :

$$J(u) = \int_0^T |u(t)|dt$$

(a) Donnez le hamiltonien associé au problème de contrôle optimal et les équations de l'état adjoint, discutez les conditions de transversalité.

Corrigé : On a $H = |u|+p_1v+p_2a+p_3u$ et $\dot{p_1} = 0$, $\dot{p_2} = -p_1$ et $\dot{p_3} = -p_2$. L'état et le temps final étant imposés il n'y a pas de conditions de transversalité.

(b) Montrez, à l'aide du principe du minimum de Pontriaguine, que le contrôle optimal u ne prend que les valeurs -1, 0 ou 1.

Corrigé : Le principe du minimum de Pontriaguine nous dit que le contrôle optimal minimise à tout instant le hamiltonien, c'est donc l'argument du minimum de $(|v| + p_3v)$, pour $-1 \leq v \leq 1$. Soit encore l'argument du minimum de

$$\left\{v(p_3 - 1), \text{ pour } -1 \leq v \leq 0 \text{ et } v(p_3 + 1) \text{ pour } 0 \leq v \leq 1\right\}$$

un simple dessin (voir Figure 1)montre que :

$$u = 1 \text{ si } p_3 < -1, \quad u = 0 \text{ si } -1 \leq p_3 \leq 1, \quad u = -1 \text{ si } p_3 > 1$$

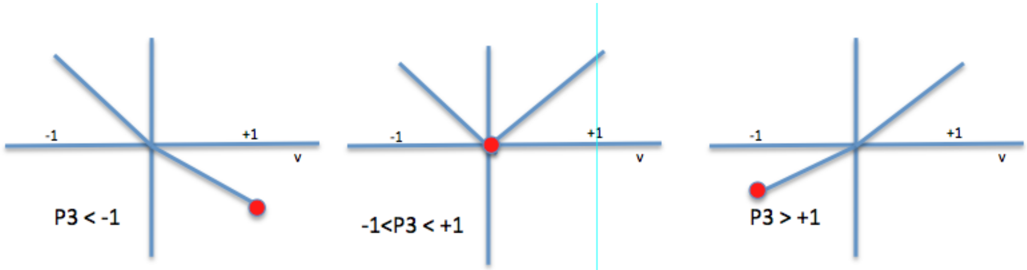

FIG. 1 – $H(v)$ en fonction des valeurs de p_3

(c) En examinant le comportement de l'état adjoint montrez que les valeurs prises successivement au cours du temps par le contrôle optimal sont une sous-suite extraite de $(-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \cdots)$, avec un maximum de 4 commutations.

Corrigé : Les équations de l'état adjoint montrent que p_3 est un polynôme du second degré en t, et il faut déterminer si sa valeur est comprise entre -1 et 1 pour $t \in [0, T]$. Là encore un simple dessin montre que soit p_3 est toujours plus grand que 1, alors $u \equiv -1$, soit inférieur à -1 et $u \equiv 1$, soit entre -1 et 1 et $u \equiv 0$, soit il coupe ces limites et on a des séquences du type $(-1, 0, 1)$ ou $(1, 0, -1)$, mais les séquences les plus longues sont soit $(1, 0, -1, 0, 1)$ quand p_3 passe par un maximum plus grand que 1, ou $(-1, 0, 1, 0, -1)$ quand il passe par un minimum plus petit que -1, donc 4 commutations au plus.

(d) En analysant le déplacement et la vitesse du tramway montrez que la séquence des valeurs prises par le contrôle optimal est nécessairement $(1, 0, -1, 0, 1)$.

Corrigé : A $t = 0$ le tramway est à l'arrêt, pour démarrer sa vitesse doit augmenter et donc aussi son accélération qui était initialement nulle, donc au voisinage de $t = 0$ il faut $u = 1$, plus tard u passera à 0 pour stopper l'augmentation de l'accélération, puis à $u = -1$ pour diminuer son accélération jusqu'à une accélération négative qui diminuera la vitesse afin de la ramener vers 0, enfin l'accélération doit revenir à 0 en $t = T$ avec une dernière étape avec $u = 1$.

(e) Par raison de symétrie la solution optimale vérifie :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \tau_1[, \\ 0 & \text{si } t \in [\tau_1, \frac{T}{2} - \tau_2[, \\ -1 & \text{si } t \in [\frac{T}{2} - \tau_2, \frac{T}{2} + \tau_2[, \\ 0 & \text{si } t \in [\frac{T}{2} + \tau_2, T - \tau_1[, \\ 1 & \text{si } t \in [T - \tau_1, T[, \end{cases}$$

et $x(\frac{T}{2}) = \frac{L}{2}$. Montrez en intégrant le contrôle que $\tau_2 = \tau_1$.

Corrigé : On a $\int_0^T u(t)dt = 2\tau_1 - 2\tau_2 = a(T) - a(0) = 0$.

(f) En déduire que $\tau (= \tau_1 = \tau_2)$ est déterminé par la relation $L = \frac{1}{4}T\tau(T - 2\tau)$.

Corrigé : Connaissant le contrôle optimal, on peut intégrer en temps les équations du mouvement, ainsi entre 0 et τ avec $u = 1$:

$$a(\tau) = \tau, \; v(\tau) = \frac{\tau^2}{2}, \; x(\tau) = \frac{\tau^3}{6}$$

puis entre τ et $\frac{T}{2} - \tau$ avec $u = 0$:

$$a(\frac{T}{2}-\tau) = \tau,\ v(\frac{T}{2}-\tau) = \tau(\frac{T}{2}-2\tau)+\frac{\tau^2}{2},\ x(\frac{T}{2}-\tau) = \frac{\tau}{2}(\frac{T}{2}-2\tau)^2+\frac{\tau^2}{2}(\frac{T}{2}-2\tau)+\frac{\tau^3}{6}$$

enfin entre $\frac{T}{2} - \tau$ et $\frac{T}{2}$ avec $u = -1$:

$$a(\frac{T}{2}) = -\tau + \tau = 0,\ v(\frac{T}{2}) = -\frac{1}{2}\tau^2 + \tau^2 + v(\frac{T}{2} - \tau)$$

$$x(\frac{T}{2}) = -\frac{1}{6}\tau^3 + \frac{\tau^3}{2} + \tau v(\frac{T}{2} - \tau) + x(\frac{T}{2} - \tau)$$

d'où l'équation déterminant τ :

$$\frac{L}{2} = -\frac{1}{6}\tau^3 + \frac{\tau^3}{2} + \tau^2(\frac{T}{2} - 2\tau) + \frac{\tau^3}{2} + \frac{\tau}{2}(\frac{T}{2} - 2\tau)^2 + \frac{\tau^2}{2}(\frac{T}{2} - 2\tau) + \frac{\tau^3}{6}$$

et le résultat demandé après simplification.
Alternativement, une autre méthode consiste à calculer $\int_0^T t^2 u(t)dt$.

(g) De ce dernier résultat retrouvez le temps minimum T_0 de la première partie.

Corrigé : l'équation qui donne τ n'a de racine réelle que si $T^3 \geq 32L$, ce qui correspond bien au temps minimum T_0.

Troisième étude - compromis consommation, vitesse, cible

5. Dans une troisième étude on cherche, toujours pour le trajet entre deux stations et pour un temps $T > T_0$ fixé mais sans imposer l'état final du tramway, à minimiser un compromis entre la consommation, la vitesse et la précision de l'état final, compromis donné par :

$$J(u) = \frac{1}{2}\left\{\int_0^T \left(u(t)^2 + (v(t) - v_e(t))^2\right) dt + \alpha\,(x(T) - L)^2 + \beta\, v(T)^2 + \gamma\, a(T)^2\right\}$$

où $v_e(t)$ est un profil de vitesse commerciale cible donné et α, β et γ des poids strictement positifs pour s'assurer que la position finale est proche de la position visée.
Dans cette étude on n'impose pas de contrainte sur u, c'est à dire $u(t) \in \mathbb{R}$.

(a) On désigne par $(\tilde{x}(t), \tilde{v}(t), \tilde{a}(t))$, l'état linéaire tangent, c'est à dire la différentielle de l'état du tramway par rapport au contrôle u, dans la direction w. Quel est le système dynamique vérifié par $(\tilde{x}(t), \tilde{v}(t), \tilde{a}(t))$? Précisez ses conditions aux limites.

Corrigé : Le système dynamique vérifié par l'état du tramway est linéaire en u, sa différentielle s'obtient donc directement par

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{v}(t), \quad \dot{\tilde{v}}(t) = \tilde{a}(t), \quad \dot{\tilde{a}}(t) = w(t)$$

Les positions étant fixées en 0, les conditions aux limites sont $(\tilde{x}(t), \tilde{v}(t), \tilde{a}(t)) = (0, 0, 0)$ pour $t = 0$.

(b) Exprimez $J'(u).w$, la différentielle de la fonction coût par rapport au contrôle u dans la direction w, en fonction de l'état, de l'état linéaire tangent, du contrôle et de w.

Corrigé :

$$J'(u).w = \int_0^T (u(t)w(t) + (v(t) - v_e(t))\tilde{v}(t))\, dt \\ + \alpha\, (x(T) - L)\tilde{x}(T) + \beta\, v(T)\tilde{v}(T) + \gamma\, a(T)\tilde{a}(T)$$

(c) Exprimez de même $J''(u).w_1.w_2$, la différentielle seconde de la fonction coût par rapport au contrôle u dans les directions w_1, w_2, en fonction de l'état, de l'état linéaire tangent, du contrôle et de w_1 et w_2.

Corrigé :

$$J''(u).w_1.w_2 = \int_0^T (w_1(t)w_2(t) + \tilde{v}_1(t)\tilde{v}_2(t))\, dt \\ + \alpha\, \tilde{x}_1(T)\tilde{x}_2(T) + \beta\, \tilde{v}_1(T)\tilde{v}_2(T) + \gamma\, \tilde{a}_1(T)\tilde{a}_2(T)$$

(d) En déduire l'existence et l'unicité du contrôle optimal u^*.

Corrigé :

$$J''(u).w.w = \int_0^T \left(w(t)^2 + \tilde{v}(t)^2\right) dt + \alpha\, \tilde{x}(T)^2 + \beta\, \tilde{v}(T)^2 + \gamma\, \tilde{a}(T)^2 \\ \leq \int_0^T w(t)^2 dt = \|w\|_{L^2}^2$$

la fonctionnelle est α-convexe continue sur $L^2([0,T])$, il y a donc existence et unicité de son minimum.

(e) Pour mettre en évidence le gradient de J dans $L^2([0,T])$, montrez que la différentielle de J peut s'écrire $J'(u).w = \int_0^T (u(t) + p(t))\, w(t)dt$, avec un "état adjoint" $p(t)$ vérifiant :

$$\ddot{p}(t) = v(t) - v_e(t) + \alpha\, (x(T) - L), \text{ avec } p(T) = \gamma\, a(T) \text{ et } \dot{p}(T) = -\beta\, v(T)$$

Indication : on remarquera que $\tilde{x}(T) = \int_0^T \tilde{v}(t)dt$.

Corrigé : Pour mettre en évidence un gradient il faut trouver un $p(t)$ tel que :

$$\int_0^T p(t)w(t)dt = \int_0^T (v(t) - v_e(t))\tilde{v}(t)dt + \alpha\, (x(T) - L)\tilde{x}(T) + \beta\, v(T)\tilde{v}(T) + \gamma\, a(T)\tilde{a}(T)$$

pour tout w dans $L^2([0,T])$. Remarquons tout d'abord que $\tilde{x}(T) = \int_0^T \tilde{v}(t)dt$, de sorte que p doit vérifier :

$$\int_0^T p(t)w(t)dt = \int_0^T (v(t) - v_e(t) + \alpha\, (x(T) - L))\tilde{v}(t)dt + \beta\, v(T)\tilde{v}(T) + \gamma\, a(T)\tilde{a}(T)$$

Or $w(t) = \dot{\tilde{a}}(t)$ donc $\int_0^T p(t)w(t)dt = \int_0^T p(t)\dot{\tilde{a}}(t)dt = -\int_0^T \tilde{a}(t)\dot{p}(t)dt + \tilde{a}(T)p(T)$ $= -\int_0^T \dot{\tilde{v}}(t)\dot{p}(t)dt + \tilde{a}(T)p(T) = \int_0^T \tilde{v}(t)\ddot{p}(t)dt - \tilde{v}(T)\dot{p}(T) + \tilde{a}(T)p(T)$; des intégrations par parties dans lesquelles on a pris en compte le fait que l'état linéaire tangent est nul en $t = 0$. Et donc il suffit que $p(t)$ vérifie

$$\ddot{p}(t) = v(t) - v_e(t) + \alpha\,(x(T) - L), \text{ avec } p(T) = \gamma\, a(T) \text{ et } \dot{p}(T) = -\beta\, v(T)$$

pour que $\nabla J = u + p$.

(f) En déduire que $\nabla J(u) = u + p$ avec :

$$p(t) = -\int_t^T (x(s) - x(T))ds + \int_t^T (t-s)v_e(s)ds$$
$$+ \alpha(x(T) - L)\frac{(t-T)^2}{2} - \beta v(T)(t-T) + \gamma a(T)$$

Corrigé : Partant de $\ddot{p}$, en intégrant en temps, compte tenu de la condition en T, on obtient :

$$\dot{p}(t) = x(t) - x(T) + \int_t^T v_e(s)ds + \alpha(x(T) - L)(t-T) - \beta v(T)$$

En intégrant une seconde fois :

$$p(t) = -\int_t^T (x(s) - x(T))ds - \int_t^T d\tau \int_\tau^T v_e(s)ds$$
$$+ \alpha(x(T) - L)\frac{(t-T)^2}{2} - \beta v(T)(t-T) + \gamma a(T)$$

Il suffit alors de remarquer que $\int_t^T d\tau \int_\tau^T v_e(s)ds = -\int_t^T (t-s)v_e(s)ds$.

(g) Définissez un algorithme qui, à partir d'un contrôle $u_0(t)$ arbitraire permet de converger vers le contrôle optimal. Justifiez, à l'aide de résultats du cours d'optimisation, la convergence de l'algorithme.

Corrigé : Le contrôle optimal est caractérisé par $\nabla J(u^*) = 0$. S'agissant d'une fonctionnelle α-convexe on est assuré que l'algorithme de descente du gradient est convergeant.
Le calcul étant discrétisé sur une grille régulière $t_i = \frac{T}{N}$ avec N suffisamment grand, l'algorithme consistera , à partir d'un contrôle u_0 à faire par récurrence :

- Intégrer le système dynamique entre 0 et T avec le contrôle u_k pour connaître $x_k(t_i)$ pour $0 \leq i \leq N$,
- Calculer les $p_k(t_i)$ avec la formule trouvée à la question précédente,
- Définir le nouveau contrôle $u_{k+1} = u_k - \rho\nabla J(u_k) = u_k - \rho(u_k + p_k)$, avec un ρ adapté,
- Et recommencer jusqu'à convergence de la suite u_k.

6. Retrouvez le résultat de la question (5f) en utilisant les outils du contrôle optimal de Pontryaguine.

Corrigé : Le hamiltonien du problème est $H = \frac{1}{2}(u^2 + (v - v_e)^2) + p_1 v + p_2 a + p_3 u$, les équations de l'état adjoint $\dot{p_1} = 0$, $\dot{p_2} = -p_1 - (v - v_e)$, $\dot{p_3} = -p_2$. Pour les conditions de transversalité (η quelconque, $\tau = 0$) on obtient $p_1(T) = \alpha(x(T) - L)$, $p_2(T) = \beta v(T)$, $p_3(T) = \gamma a(T)$. Ce qui permet d'intégrer le système dynamique adjoint :

$$
\begin{aligned}
p_1(t) =& \alpha(x(T) - L), \\
\dot{p_2}(t) =& -\alpha(x(T) - L) - (\dot{x}(t) - v_e(t)), \\
p_2(t) =& -\alpha(x(T) - L)(t - T) - (x(t) - x(T)) - \int_t^T v_e(s)ds + \beta v(T), \\
p_3(t) =& \alpha(x(T) - L)\frac{(t - T)^2}{2} - \int_t^T (x(s) - x(T))ds - \int_t^T d\tau \int_\tau^T v_e(s)ds \\
& - \beta v(T)(t - T) + \gamma a(T).
\end{aligned}
$$

On constate donc que $p_3 = p$ et comme $\nabla J = H_u$ on retrouve bien le résultat de la question (5f) .