Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2014-2015
MACS 3
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du mercredi 12 novembre 2014

Durée : 3 h
Une feuille recto-verso de notes manuscrites personnelles est autorisée

Exercice

On considère le système dynamique $\dot{x}(t) = u(t)$, avec la contrainte $|u(t)| \leq 1$ pour $t \in [0, T]$, T fixé, et la fonction coût $J(u) = \frac{1}{2}(x(T))^2$. Une solution évidente de ce problème est donnée par le contrôle

$$u^*(x,t) = -\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Calculez $J^*(x,t)$ le coût associé au contrôle u^*.
2. Vérifiez que J^* est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

Corrigé : Rappel - la fonction de Bellman $V(x,t)$, qui est le coût optimal en partant de l'état x au temps t, vérifie l'équation HJB :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left(L + \frac{\partial V}{\partial x}.f \right) = 0, \quad V(x,t) = \lambda(x,t) \quad \text{sur la cible}$$

où L est le coût instantané le long de la trajectoire, λ le coût final, f le second membre du système dynamique ; le contrôle optimal étant l'argument du minimum.

Le coût associé au contrôle donné dans l'énoncé est $J^*(x,t) = \frac{1}{2}\left(\max\{0, |x| - (T-t)\}\right)^2$, vérifions que J^* est solution de HJB. Cette fonction vérifie bien la condition à la limite en T puisque $J^*(x,T) = \frac{1}{2}x^2$. D'autre part

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(x,t) = \max\{0, |x| - (T-t)\}, \quad \frac{\partial J^*}{\partial x}(x,t) = \text{signe}(x) \max\{0, |x| - (T-t)\}$$

d'où

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} + \min_{|u|\leq 1} \left(0 + \frac{\partial J^*}{\partial x} u \right) = \min_{|u|\leq 1} [1 + \text{signe}(x) u] \max\{0, |x| - (T-t)\}$$

une quantité qui est bien identiquement nulle pour tout (x,t), de plus le contrôle défini plus haut est bien argument du minimum. On a donc bien vérifié que J^* est solution de HJB.

Problème

On considère le système dynamique :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2y_1 + u & y_1(0) = y_{10} \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_2 + u & y_2(0) = y_{20} \end{cases}$$

où la commande $u(t)$ est contrainte par $|u| \leq 1$ et est à déterminer pour un retour à l'origine ($y_1(T) = y_2(T) = 0$) en temps minimum.

1. Formez le Hamiltonien du système, écrivez les équations satisfaites par l'état adjoint p (avec les conditions aux limites dites de transversalité) et donnez l'expression du gradient du critère en fonction de p.
2. Démontrez que la commande optimale u^* est une commande bang-bang et qu'il y a au plus une commutation.
3. Montrez que quand la commande u est constante et égale à une valeur u_c, la trajectoire dans le plan (y_1, y_2) est une parabole de sommet $(\frac{u_c}{2}, u_c)$. Tracez ces trajectoires pour la commande en butée et indiquez, en le justifiant, le sens de parcourt.
4. Construire, et justifier, la courbe de commutation. Donnez la loi de commande de feedback.
5. Montrez que le problème de contrôle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = u, \quad x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = x_1$$

   où la commande $u(t)$ contrainte par $|u| \leq 1$ est à déterminer pour un retour au repos ($x(T) = \frac{dx}{dt}(T) = 0$) en temps minimum, se ramène au problème précédent par changement de variables.