Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
Licence SPI - ATS - L2 - S4
C. Basdevant - B. Mussat

Corrigé de l'examen partiel du 5 mars 2012

Durée : 3h

Une unique feuille recto-verso de notes personnelles est autorisée. Les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1 *On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel L engendré par les vecteurs $l_1 = (1,1,1,1)$, $l_2 = (1,-1,1,-1)$ et $l_3 = (1,3,1,3)$ et le sous-espace M engendré par les vecteurs $m_1 = (1,2,0,2)$, $m_2 = (1,2,1,2)$ et $m_3 = (3,1,3,1)$.*

1. *Déterminez la dimension de L et donnez une base de L.*

   Corrigé *: Regardons si les vecteurs l_1, l_2 et l_3 sont libres. En posant $\alpha l_1+\beta l_2+\gamma l_3 = 0$ on trouve comme solution possible $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$, les 3 vecteurs sont liés, par contre on vérifie facilement que l_1 et l_2 sont libres, ils forment une base de L qui est de dimension 2.*

2. *Déterminez la dimension de M et donnez une base de M.*

   Corrigé *: Regardons si les vecteurs m_1, m_2 et m_3 sont libres. En posant $\alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3 = 0$ on trouve comme unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$, les 3 vecteurs sont libres et forment une base de M qui est de dimension 3.*

3. *Déterminez si $l_1 \in M$.*

   Corrigé *: Cherchons des coefficients α, β et γ tels que $l_1 = \alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3$, on trouve comme unique solution $\alpha = 0$, $\beta = \frac{2}{5}$, $\gamma = \frac{3}{5}$, donc $l_1 \in M$.*

4. *En déduire les dimensions de $L \cap M$ et de $L + M$.*

   Corrigé *: On vérifie que $l_2 \in M$ et on déduit des questions précédentes que $L \subset M$ et donc $L \cap M = M$ et $L + M = M$*

Exercice 2 *Soit A la matrice 2×2 : $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$*

1. *Déterminez les valeurs propres de A.*

   Corrigé *: Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A :*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left((\frac{7}{25} - \lambda)(-\frac{7}{25} - \lambda) + \frac{24}{25} \right) = \lambda^2 - 1$$

   Ses deux racines $\lambda_1 = +1$ et $\lambda_2 = -1$ sont les valeurs propres de A. Ces valeurs propres sont réelles et distinctes, les vecteurs propres associés forment une partie libre, la matrice est donc diagonalisable

2. *Déterminez une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A.*

   Corrigé : *Les vecteurs propres $X = (x, y)$ associés à une valeur propre λ de A vérifient $AX = \lambda X$, soit pour λ_1, $7x + 6y = 5x$ et $-4x - 7y = 5y$ qui se ramènent à $x + 3y = 0$ on peut alors choisir $X_1 = (-3, 1)$; pour λ_2 on a $7x + 6y = -5x$ et $-4x - 7y = -5y$ qui se ramènent à $2x + y = 0$ on peut alors choisir $X_2 = (1, -2)$.*

3. *Déterminez une matrice P qui diagonalise A (i.e. telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale).*

   Corrigé : *Les deux vecteurs propres X_1 et X_2 forment une base et la matrice de passage P de la base X_1, X_2 à la base canonique est $P = \begin{pmatrix} X1 & X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. On calcule alors la matrice inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

4. *En déduire A^{2n} et A^{2n+1} pour $n \geq 1$.*

   Corrigé : *Comme $A = PDP^{-1}$ on en déduit $A^n = PD^nP^{-1}$. Puisque $D^{2n} = I$ on obtient $A^{2n} = I$, et puisque $D^{2n+1} = D$ on obtient $A^{2n+1} = A$.*

5. *On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies par récurrence par :*

$$\left| \begin{array}{l} 5\,u_{n+1} = 7u_n + 6v_n \\ 5\,v_{n+1} = -4u_n - 7v_n \end{array} \right.$$

   et vérifiant les conditions initiales : $u_0 = 1$, $v_0 = -1$. Calculez (u_n) et (v_n) selon la parité de n.

   Corrigé : *En posant $X_n = (u_n, v_n)$, l'équation de récurrence s'écrit $X_{n+1} = AX_n$, on en déduit $X_n = A^n X_0$ et donc d'après les résultats précédents $X_{2n} = X_0$ et $X_{2n+1} = AX_0$. Soit $X_{2n} = (1, -1)$ et $X_{2n+1} = (\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$.*

Exercice 3 *Soit A la matrice 3×3 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*

1. *Calculez le polynôme caractéristique de A et déterminez ses valeurs propres.*

   Corrigé :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 2)$$

   Ses racines, les valeurs propres de A, sont 0, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

2. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3 dont A est la matrice dans une base (e_1, e_2, e_3) de E. Déterminez la dimension du noyau de f et la dimension de l'image de f.*

   Corrigé : *Les valeurs propres de f sont celles de A, elles sont distinctes donc les 3 sous-espaces propres sont chacun de dimension 1. Le noyau de f est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, il est donc de dimension 1. D'après la formule sur la dimension ($\dim E = \dim Kerf + \dim Imf$) la dimension de l'image de f est donc 2.*

3. *On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit g l'endomorphisme de E dont A est la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$. Déterminez les polynômes $P(X)$ appartenant au noyau de g.*

   Corrigé *: Soit $P(X) = a+bX+cX^2$ un polynôme de E, (a, b, c) sont ses coordonnées dans la base canonique. Son image $g(P)$ a pour coordonnées $A(a, b, c)^t = (b, a+c, b)^t$ dans cette même base, soit $g(P)(X) = b+(a+c)X+bX^2$. Si P appartient au noyau de g alors $b = 0$ et $a + c = 0$, donc $P(X) = a(1 - X^2)$.*

4. *Enoncez le théorème d'Hamilton-Cayley et en déduire que $g^3 = 2g$.*

   Corrigé *: Le théorème d'Hamilton-Cayley énonce que $P_A(A) = 0$ ou de façon équivalente $P_g(g) = 0$, on en déduit que $-g^3 + 2g = 0$.*

Exercice 4 *Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Pour tout $P \in E$, on pose :*

$$f(P)(x) = 4\int_0^x P(t)dt - xP(x) + P'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1. *Montrez que f est un endomorphisme de E*

   Corrigé *: L'application f est linéaire (on vérifie facilement que $f(P+Q) = f(P)+f(Q)$ et $f(\lambda P) = \lambda f(P)$). Pour vérifier que f est un endomorphisme de E, c'est à dire que $f(P)$ est un polynôme de degré inférieur à 3, il suffit de vérifier que $f(x^3)$ est dans E, or $f(x^3) = x^4 - x^4 + 3x^2 = 3x^2$.*

2. *Donnez la matrice M de f dans la base canonique de E.*

   Corrigé *: On sait que la i-ème colonne de la matrice M contient les coordonnées de l'image du i-ème vecteur de la base. Or $f(1) = 4x - x = 3x$, $f(x) = 2x^2 - x^2 + 1 = x^2 + 1$, $f(x^2) = \frac{4}{3}x^3 - x^3 + 2x = \frac{1}{3}x^3 + 2x$ et $f(x^3) = 3x^2$, d'où la matrice :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Déterminez le noyau et l'image de f.*

   Corrigé *: Si $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, alors $f(P)(x) = b + (3a + 2c)x + (b + 3d)x^2 + \frac{c}{3}x^3$. Si P est dans le noyau de f alors $b = 0$ et $3a + 2c = 0$, $b + 2d = 0$ et $c = 0$, ce qui entraine $a = b = c = d = 0$: le noyau de f est réduit au polynôme nul, f est inversible et son image est E.*

Exercice 5 *On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de la base $e_1 = (2, 0, 1)$, $e_2 = (3, 0, 4)$ et $e_3 = (0, 2, 5)$. Construisez par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt une base orthogonale (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$.*

Corrigé *: On prend* $u_1 = e_1 = (2,0,1)$, *puis on cherche* u_2 *sous la forme* $u_2 = e_2 + \alpha_{2,1} u_1$ *avec* $\alpha_{2,1}$ *tel que* $< u_1, u_2 >= 0$. *Soit* $\alpha_{2,1} = - < e_2, u_1 > / < u_1, u_1 >= -2$, *d'où* $u_2 = (-1,0,2)$. *Enfin on cherche* u_3 *sous la forme* $u_3 = e_3 + \alpha_{3,1} u_1 + \alpha_{3,2} u_2$ *avec* $\alpha_{3,1}$ *et* $\alpha_{3,2}$ *tels que* $< u_1, u_3 >= 0$ *et* $< u_2, u_3 >= 0$. *Soit* $\alpha_{3,1} = - < e_3, u_1 > / < u_1, u_1 >= -1$ *et* $\alpha_{3,2} = - < e_3, u_2 > / < u_2, u_2 >= -2$, *d'où* $u_3 = (0,2,0)$.