

Corrigé de l'examen du 15 mai 2012

Durée : 3h

Une unique feuille recto-verso de notes personnelles est autorisée. Les téléphones portables ne sont pas autorisés

Vous justifierez soigneusement vos résultats, en particulier pour les exercices de probabilité identifiez soigneusement les événements envisagés et énoncez les résultats du cours utilisés.

Exercice 1. La coupe du monde de football de 2014 aura lieu au Brésil. On suppose que la France y participe.

Dans une telle compétition l'équipe de France gagne son premier match avec une probabilité de 0,25. De plus si le premier match est gagné, elle gagne le second match avec une probabilité de 0,5. Par contre, si elle a perdu son premier match elle gagne le second avec une probabilité de 0,1. On supposera qu'il ne peut y avoir de match nul.

1. Quelle est la probabilité pour la France de gagner son second match ?

Corrigé : Soit A l'évènement "La France gagne son premier match" et B l'évènement "Elle gagne son second match". L'énoncé nous dit : $P(A) = 0,25$, $P(B|A) = 0,5$ et $P(B|A^c) = 0,1$. On demande de calculer $P(B)$, la formule des probabilités totales nous dit : $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$, soit $P(B) = 0,5 \times 0,25 + 0,1 \times 0,75 = 0,2$.

2. Quelle est la probabilité pour la France de gagner les deux matchs ?

Corrigé : On demande de calculer $P(A \cap B)$, la formule des probabilités conditionnelles permet cela : $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$, soit $P(A \cap B) = 0,5 \times 0,25 = 0,125$.

3. Quelle est la probabilité que la France ait gagné le premier match sachant qu'elle a remporté le second ?

Corrigé : On demande de calculer $P(A|B)$, la formule de Bayes, comme la formule des probabilités conditionnelles, permet cela, par exemple pour cette dernière : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$, soit $P(A|B) = \frac{0,5 \times 0,25}{0,2} = 0,625$.

Exercice 2. On considère un dé cubique pipé (c'est à dire truqué ou déséquilibré), de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k . Ainsi, si Y dénote la variable aléatoire associée au résultat du lancer de ce dé, on a, pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(Y = k) = ck$, où c est une constante à déterminer.

1. Déterminez c pour que cette définition soit bien une probabilité.

Corrigé : Il faut, d'une part vérifier $P(Y = k) \geq 0$, $\forall k$, ce qui sera le cas si $c \geq 0$, et imposer que $\sum_{k=1}^6 P(Y = k) = 1$, ce qui donne $c = \frac{1}{21}$.

2. Calculez l'espérance et la variance de Y .

Corrigé : $E(Y) = \sum_{k=1}^6 kP(Y = k) = c \sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{6 \times 7 \times 13}{21 \times 6} = \frac{13}{3}$.
 $E(Y^2) = \sum_{k=1}^6 k^2 P(Y = k) = c \sum_{k=1}^6 k^3 = \frac{6^2 \times 7^2}{21 \times 4} = 21$.
 $Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 21 - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$.

3. On lance maintenant indéfiniment le même dé pipé jusqu'à obtenir un 6. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.

- (a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par Z

Corrigé : $Z \in \mathbb{N}^*$

- (b) Donnez la loi de probabilité de Z .

Corrigé : Z suit la loi géométrique de paramètre $p = P(Y = 6)$ soit $\mathcal{G}\left(\frac{2}{7}\right)$, donc $P(Z = n) = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}$.

- (c) Calculez la probabilité que le 6 sorte en 3 coups au plus (on pourra laisser le résultat sous forme d'une fraction irréductible).

Corrigé : $P(Z \leq 3) = \sum_{n=1}^3 P(Z = n) = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^0 + \frac{2}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^1 + \frac{2}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{218}{343} \approx 0.6356$

- (d) Donnez l'espérance et la variance de Z .

Corrigé : $E(Z) = \frac{1}{p} = \frac{7}{2}$, $Var(Z) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{35}{4}$.

Exercice 3. On considère une élection qui doit départager deux candidats N et F . On ne considèrera ici que les électeurs se prononçant pour l'un des deux (pas de vote blanc ou nul). La proportion réelle des électeurs votant pour le candidat N est p . Au cours d'un sondage, un électeur qui va réellement voter pour le candidat N répond honnêtement avec la probabilité 90%. Ceux qui ne voteront pas pour N (mais pour F) répondent honnêtement à 99%.

1. Calculez en fonction de p la probabilité q pour qu'un sondé, pris au hasard, réponde qu'il va voter pour N .

Indication : pour $p = 5\%$ on trouvera $q = 5.45\%$ et pour $p = 45\%$, $q = 41.05\%$.

Corrigé : Soit A l'évènement "l'électeur vote pour N ", l'énoncé nous dit que $P(A) = p$. Soit B l'évènement "le sondé répond honnêtement", l'énoncé nous dit que $P(B|A) = 0.9$ et $P(B|A^c) = 0.99$.

On demande la probabilité de l'évènement C "un sondé répond qu'il va voter N ". Un tel personnage est soit un partisan de N honnête (soit $A \cap B$), soit un partisan de F malhonnête ($A^c \cap B^c$) et donc $C = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$, ces deux évènements étant incompatibles leurs probabilités s'ajoutent et ainsi $P(C) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B^c)$.

Par ailleurs $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.9 \times p$ et $P(A^c \cap B^c) = P(B^c|A^c)P(A^c) = (1 - P(B|A^c))(1 - P(A)) = (1 - 0.99) \times (1 - p) = 0.01 \times (1 - p)$, d'où le résultat $q = P(C) = 0.89 \times p + 0.01$.

2. En déduire en fonction de p la probabilité r pour qu'un électeur, pris au hasard, vote réellement pour N sachant qu'il a répondu qu'il vote pour N .
Indication : pour $p = 5\%$ on trouvera $r = 82.57\%$ et pour $p = 45\%$, $r = 98.66\%$.

Corrigé : On demande ici de calculer $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$, or $P(A \cap C) = P(A \cap B) = 0.9 \times p$, donc $r = P(A|C) = \frac{0.9 \times p}{q} = \frac{0.9 \times p}{0.89 \times p + 0.01}$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n avec $n \geq 1$. Pour tout $P \in E$, on pose :

$$f(P)(x) = c \int_0^x P(t) dt - xP(x) + P'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1. Déterminez c pour que f soit un endomorphisme de E

Corrigé : L'application f est linéaire (on vérifie facilement que $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$ et $f(\lambda P) = \lambda f(P)$).

Pour que f soit un endomorphisme de E , il faut que $f(P)$ soit un polynôme de degré inférieur à n pour tout $P \in E$, il suffit pour cela de le vérifier pour tous les éléments d'une base, or, pour $p = 0$, $f(x^0) = (c-1)x$, et pour $p \geq 1$, $f(x^p) = (\frac{c}{p+1} - 1)x^{p+1} + px^{p-1}$. La propriété est donc vraie pour $p < n$, pour qu'elle soit vraie également pour $p = n$ il faut imposer $c = n + 1$.

2. On considère dans la suite le cas $n = 3$ et $c = 4$. Donnez la matrice M de f dans la base canonique de E .

Corrigé : On sait que la i -ème colonne de la matrice M contient les coordonnées de l'image du i -ème vecteur de la base. Or $f(1) = 4x - x = 3x$, $f(x) = 2x^2 - x^2 + 1 = x^2 + 1$, $f(x^2) = \frac{4}{3}x^3 - x^3 + 2x = \frac{1}{3}x^3 + 2x$ et $f(x^3) = 3x^2$, d'où la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Déterminez le noyau et l'image de f .

Corrigé : Si $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, alors $f(P)(x) = b + (3a + 2c)x + (b + 3d)x^2 + \frac{c}{3}x^3$. Si P est dans le noyau de f alors $b = 0$ et $3a + 2c = 0$, $b + 2d = 0$ et $c = 0$, ce qui entraîne $a = b = c = d = 0$: le noyau de f est réduit au polynôme nul, f est inversible et son image est E .

4. Démontrez que f est diagonalisable.

Corrigé : Calculons le polynôme caractéristique de f , c'est à dire celui de la matrice M :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(-\lambda^3 + 3\lambda) - (3\lambda^2 - 3) = \lambda^4 - 6\lambda^2 + 3 \end{aligned}$$

On constate alors que le polynôme caractéristique a ses 4 racines réelles et distinctes, l'endomorphisme est donc diagonalisable.

Exercice 5. On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel et de la base $e_1 = (2, 0, 1)$, $e_2 = (3, 0, 4)$ et $e_3 = (0, 2, 5)$. Construisez par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt une base orthogonale (u_1, u_2, u_3) de \mathbb{R}^3 puis une base orthonormale (v_1, v_2, v_3) .

Corrigé :

- On prend $u_1 = e_1 = (2, 0, 1)$,
- puis on cherche u_2 sous la forme $u_2 = e_2 + \alpha_{2,1}u_1$ avec $\alpha_{2,1}$ tel que $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$.
Soit $\alpha_{2,1} = -\langle e_2, u_1 \rangle / \langle u_1, u_1 \rangle = -2$, d'où $u_2 = (-1, 0, 2)$.
- Enfin on cherche u_3 sous la forme $u_3 = e_3 + \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2$ avec $\alpha_{3,1}$ et $\alpha_{3,2}$ tels que $\langle u_1, u_3 \rangle = 0$ et $\langle u_2, u_3 \rangle = 0$. Soit $\alpha_{3,1} = -\langle e_3, u_1 \rangle / \langle u_1, u_1 \rangle = -1$ et $\alpha_{3,2} = -\langle e_3, u_2 \rangle / \langle u_2, u_2 \rangle = -2$, d'où $u_3 = (0, 2, 0)$.

Pour avoir une base orthonormale il suffit de diviser les vecteurs u_i par leurs normes respectives, soit : $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, 2)$, $v_3 = \frac{1}{2}(0, 2, 0)$.