Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
Licence SPI - L2 - S4
C. Basdevant

Examen du vendredi 22 juin 2012

Durée : 3h

Une unique feuille recto-verso de notes personnelles est autorisée. Les téléphones portables ne sont pas autorisés

Vous justifierez soigneusement vos résultats, en particulier pour les exercices de probabilité identifiez soigneusement les évènements envisagés et énoncez les résultats du cours utilisés.

Exercice 1. Soit B et C deux événements de probabilités $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(C) = \frac{1}{2}$. Calculez $P(B \cup C)$ et $P(B \cup C^c)$

1. si B et C sont des événements indépendants ;
2. si B et C sont des événements incompatibles.

Exercice 2. Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :
- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note respectivement M et T les événements «Être porteur de la maladie» et «Avoir un test positif».

1. Traduisez l'énoncé en termes de probabilités.
2. Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit six animaux au hasard. La taille du troupeau est telle qu'on peut assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux six animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   (a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   (b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des six animaux ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1000 euros. On suppose que le test est gratuit (remboursé par la collectivité). On note C la variable aléatoire du coût à engager par animal.

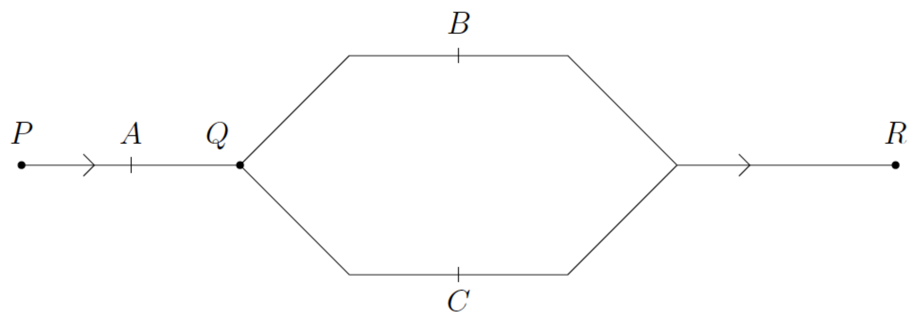
(a) D'après ce qui précède, montrer que la loi de probabilité de C est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1000
Probabilité	0,931	0,066	0,003

(b) Calculer l'espérance de la variable C.

(c) Un éleveur possède un troupeau de 300 bêtes. Tout le troupeau est soumis au test. Au total, quelle somme va-t-il dépenser en moyenne ?

Exercice 3. Des tuyaux sont disposés suivant le dessin ci-dessous. Des robinets sont



placés en A, B, C. Ils sont fermés indépendamment les uns des autres avec les probabilités respectives $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

On note AO l'événement «le robinet A est ouvert», BO l'événement «le robinet B est ouvert», CO l'événement «le robinet C est ouvert», et enfin PR l'événement «l'eau coule de P à R».

1. Exprimez PR en fonction des événements AO, BO et CO.
2. Montrer que la probabilité que l'eau puisse couler de P à R est égale à $\frac{5}{8}$. On prendra soin de bien justifier sa réponse.

Exercice 4. Soit U le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

1. Calculez $U\,{}^tU$ et ${}^tU\,U$.
2. Soit $A = aI + b\,U\,{}^tU$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Calculez A^2 et exprimez A^2 en fonction de A et I.
3. En supposant A inversible, exprimez A^{-1} en fonction de A et I ; en déduire une CNS d'existence de A^{-1}.

Exercice 5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

1. Diagonalisez A.
2. En déduire A^n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et

$$\left|\begin{array}{l} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{array}\right.$$

   Exprimer le terme général de (u_n) et (v_n) en fonction de n.