Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
Licence SPI - ATS - L2 - S4
C. Basdevant - Q. H. Phan

Corrigé de l'examen partiel du 19 mars 2013

Durée : 3h

Une unique feuille recto-verso de notes personnelles est autorisée. Les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1 *On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par :*

$$f(x, y, z, t) = (x + z + t, x + y + t, y - z)$$

1. *Montrez que f est une application linéaire.*
2. *Donnez la matrice associée à f.*
3. *Déterminez la dimension et une base de $\ker(f)$.*
4. *Déterminez le rang de f et une base de l'image de f.*
5. *Déterminez un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$.*
6. *On considère une application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to G$, telle que $\ker(g) = \mathrm{Im}(f)$. Déterminez la dimension minimale de l'espace vectoriel G et donnez un exemple d'une telle application linéaire.*
7. *Que vaut $g \circ f$?*

Exercice 2 *Soit E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E.*

1. *Montrez que pour tout $x \in E$ il existe un couple unique $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.*

   Corrigé *: F_1 et F_2 sont supplémentaires, si, par définition, $E = F_1 + F_2$ et ils sont en somme directe, c'est à dire $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, on note alors $E = F_1 \oplus F_2$. Etant donné $x \in E$, E étant la somme de F_1 et F_2 il existe un couple $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Supposons qu'il en existe un autre : $x = x'_1 + x'_2$, alors $x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2 \in F_1 \cap F_2$, donc $x'_1 = x_1$ et $x'_2 = x_2$, d'où l'unicité.*

2. *Soit $f : E \to E$ tel que $f(x) = x_1$ (projection sur F_1 parallèlement à F_2), montrez que f est une application linéaire et vérifie $f \circ f = f$.*

   Corrigé *Soit $x = x_1 + x_2 \in E$ et sa décomposition suivant F_1 et F_2, ainsi $f(x) = x_1$, de même $y = y_1 + y_2$ et $f(y) = y_1$. Alors $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$ avec $x_1 + y_1 \in F_1$ et $x_2 + y_2 \in F_2$ et la décomposition de $x + y$ étant unique on en déduit que $f(x + y) = x_1 + y_1 = f(x) + f(y)$. De façon similaire $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2$ et ainsi $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. f est donc une application linéaire. Calculons maintenant $f \circ f$: $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x_1)$, mais la décomposition de x_1 suivant F_1 et F_2 est $x_1 = x_1 + 0$, soit $f(x_1) = x_1$, on a donc bien vérifié que $f \circ f(x) = f(x)$.*

3. *Réciproquement, soit g une application linéaire de E dans E qui vérifie $g \circ g = g$. On pose $E_1 = \mathrm{Im}(g)$ et $E_2 = \mathrm{Im}(Id - g)$ (ou Id désigne l'application identique de E dans E). Montrez que $E = E_1 \oplus E_2$ et que g est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.*

   Corrigé *Soit $x \in E_1 \cap E_2$, $x \in E_1$ donc $\exists y$ tel que $x = g(y)$, $x \in E_2$ donc $\exists z$ tel que $x = (I - g)(z)$, on en déduit $g(y) = z - g(z)$, en appliquant g on obtient $g \circ g(y) = g(z) - g \circ g(z)$, mais $g(z) = g \circ g(z)$ par hypothèse, de même pour y, l'équation devient $g(y) = 0$, on a donc prouvé $x = 0$, E_1 et E_2 sont en somme directe.*
   Maintenant soit $x \in E$, on a $x = g(x) + x - g(x)$, avec $g(x) \in E_1$ et $(x - g(x)) \in E_2$, on a donc décomposé x suivant les deux sous-espaces, on a bien $E = E_1 \oplus E_2$ et g est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Exercice 3 *Soit A la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$*

1. *Déterminez les valeurs propres de A.*

   Corrigé *: Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A :*

   $$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(-3 - \lambda) + 8) = \lambda^2 - 1$$

   Ses deux racines $\lambda_1 = +1$ et $\lambda_2 = -1$ sont les valeurs propres de A. Ces valeurs propres sont réelles et distinctes, les vecteurs propres associés forment une partie libre, la matrice est donc diagonalisable

2. *Déterminez une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A.*

   Corrigé *: Les vecteurs propres $X = (x, y)$ associés à une valeur propre λ de A vérifient $AX = \lambda X$, soit pour λ_1, $3x - 2y = x$ et $4x - 3y = y$ qui se ramènent à $x - y = 0$ on peut alors choisir $X_1 = (1, 1)$; pour λ_2 on a $3x - 2y = -x$ et $4x - 3y = -y$ qui se ramènent à $2x - y = 0$ on peut alors choisir $X_2 = (1, 2)$.*

3. *Déterminez une matrice P qui diagonalise A (i.e. telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale).*

   Corrigé *: Les deux vecteurs propres X_1 et X_2 forment une base et la matrice de passage P de la base X_1, X_2 à la base canonique est $P = \begin{pmatrix} X1 & X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule alors la matrice inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

4. *En déduire A^{2n} et A^{2n+1} pour $n \geq 1$.*

   Corrigé *: Comme $A = PDP^{-1}$ on en déduit $A^n = PD^nP^{-1}$. Puisque $D^{2n} = I$ on obtient $A^{2n} = I$, et puisque $D^{2n+1} = D$ on obtient $A^{2n+1} = A$.*

5. *On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies par récurrence par :*

   $$\left| \begin{array}{l} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - 3v_n \end{array} \right.$$

et vérifiant les conditions initiales : $u_0 = 1$, $v_0 = -1$. Calculez (u_n) et (v_n) selon la parité de n.

Corrigé *: En posant $X_n = (u_n, v_n)$, l'équation de récurrence s'écrit $X_{n+1} = AX_n$, on en déduit $X_n = A^n X_0$ et donc d'après les résultats précédents $X_{2n} = X_0$ et $X_{2n+1} = AX_0$. Soit $X_{2n} = (1, -1)$ et $X_{2n+1} = (5, 7)$.*

Exercice 4 *Soit A la matrice 3×3 : $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 3 \\ -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$*

1. *Calculez le polynôme caractéristique de A et déterminez ses valeurs propres.*

   Corrigé *:*
   $$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 2)$$
   Ses racines, les valeurs propres de A, sont 0, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

2. *Déterminez la dimension du noyau de A et la dimension de l'image de A.*

   Corrigé *: Les valeurs propres de f sont celles de A, elles sont distinctes donc les 3 sous-espaces propres sont chacun de dimension 1. Le noyau de f est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, il est donc de dimension 1. D'après la formule sur la dimension ($\dim E = \dim Kerf + \dim Imf$) la dimension de l'image de f est donc 2.*

3. *Déterminez des bases des sous-espaces propres de A.*

   Corrigé *: Soit $P(X) = a + bX + cX^2$ un polynôme de E, (a, b, c) sont ses coordonnées dans la base canonique. Son image $g(P)$ a pour coordonnées $A(a, b, c)^t = (b, a + c, b)^t$ dans cette même base, soit $g(P)(X) = b + (a + c)X + bX^2$. Si P appartient au noyau de g alors $b = 0$ et $a + c = 0$, donc $P(X) = a(1 - X^2)$.*

4. *Expliquez si la matrice est diagonalisable ou trigonalisable (justifiez votre réponse).*
5. *Diagonalisez ou trigonalisez A.*

Exercice 5 *On considère le système différentiel :*

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} x' = x - y \\ y' = -3x - 2y - 5z \\ z' = x + y + 2z \end{array} \right.$$

où x, y, z sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad et \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

1. *Mettre le système sous la forme $X'(t) = AX(t)$, avec A une matrice à déterminer.*
2. *Diagonalisez A.*
3. *En déduire la solution générale du système (S).*