Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
Licence SPI - L2 - S4
C. Basdevant

Corrigé de l'examen du 21 mai 2013

Durée : 3h
Une unique feuille recto-verso de notes personnelles est autorisée. Les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1 *Julie a trois possibilités pour passer ses soirées, soit elle reste bouquiner chez elle, soit elle va au cinéma avec Antoine, soit elle dîne avec Béatrice. Elle ne fait jamais deux soirs de suite la même chose. Si un soir elle sort avec Antoine, le lendemain elle dînera avec Béatrice. Si un soir elle dîne avec Béatrice ou reste bouquiner chez elle, le lendemain elle a deux fois plus de chance de sortir avec Antoine que de choisir l'autre possibilité. Le premier jour Julie a autant de chance de choisir l'une des trois possibilités. On considère pour $n > 0$ les évènements :*

- $A_n = \{$ *Julie sort avec Antoine le jour* n $\}$,
- $B_n = \{$ *Julie dîne avec Béatrice le jour* n $\}$,
- $C_n = \{$ *Julie reste chez elle le jour* n $\}$,

et on note respectivement a_n, b_n et c_n leurs probabilités.

1. *Démontrez que pour tout $n \geq 1$, $a_n + b_n + c_n = 1$. Calculez a_1, b_1 et c_1.*

   Corrigé *: Puisque, le jour n, Julie choisit l'une et l'une seule des trois possibilités, A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements et donc $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1$. D'après l'énoncé, $a_1 = b_1 = c_1 = \dfrac{1}{3}$.*

2. *Traduire en termes de probabilités conditionnelles la phrase "Si un soir elle sort avec Antoine, le lendemain elle dînera avec Béatrice".*

   Corrigé *: $P(A_{n+1}/A_n) = 0$, $P(B_{n+1}/A_n) = 1$, $P(C_{n+1}/A_n) = 0$*

3. *Traduire en termes de probabilités conditionnelles la phrase "Si un soir elle dîne avec Béatrice ou reste bouquiner chez elle, le lendemain elle a deux fois plus de chance de sortir avec Antoine que de choisir l'autre possibilité".*

   Corrigé *:*
   $P(A_{n+1}/B_n) = \dfrac{2}{3}$, $P(B_{n+1}/B_n) = 0$, $P(C_{n+1}/B_n) = \dfrac{1}{3}$
   $P(A_{n+1}/C_n) = \dfrac{2}{3}$, $P(B_{n+1}/C_n) = \dfrac{1}{3}$, $P(C_{n+1}/C_n) = 0$

4. *En déduire a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}*

   Corrigé *: A_n, B_n et C_n étant un système complet d'évènements, nous pouvons utiliser la formule des probabilités totales :*

   $$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}/A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}/B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}/C_n)P(C_n)$$

d'où la relation :

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n$$

de même on obtient :

$$b_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}c_n, \quad et \quad c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$$

5. *On pose* $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, *déterminez le vecteur* $Y \in \mathbb{R}^2$ *et la matrice* M *tels que* $X_{n+1} = Y + MX_n$.

   Corrigé *: En reportant* $c_n = 1 - a_n - b_n$ *dans les équations de* a_{n+1} *et* b_{n+1} *on obtient :*

$$a_{n+1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}a_n \quad et \quad b_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{3}b_n$$

   D'où $Y = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ *et* $M = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

6. *Déterminez* L *tel que* $L = Y + ML$, *en déduire que* $(X_{n+1} - L) = M(X_n - L)$.

   Corrigé *: On obtient* $L = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 9/20 \end{pmatrix}$, *la relation indiquée s'obtient alors en soustrayant membre à membre les équations de* X_{n+1} *et* L.

7. *Diagonalisez la matrice* M *(déterminez ses valeurs propres, vecteurs propres et les matrices* Q *et* Q^{-1} *qui la diagonalisent).*

   Corrigé *: La matrice* M *est triangulaire, ses valeurs propres sont sur la diagonale, soit* $-2/3$ *et* $-1/3$, *le vecteur* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est vecteur propre pour la valeur propre* $-1/3$. *Les vecteurs propres associés à la valeur propre* $-2/3$ *vérifient* $2/3x - 1/3y = -2/3y$, *on peut donc prendre* $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *On aura* $Q^{-1}MQ = D = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$ *avec*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8. *En déduire* a_n, b_n *et* c_n *en fonction de* n.

   Corrigé *:* $(X_n - L) = M^{n-1}(X_1 - L)$, *comme* $M = QDQ^{-1}$ *on en déduit :*

$$X_n = L + QD^{n-1}Q^{-1}(X_1 - L)$$

   et ainsi :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{8}{20} - \frac{1}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
b_n &= \frac{9}{20} + \frac{2}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
c_n &= \frac{3}{20} - \frac{1}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

9. *Quelle est la soirée de Julie qui aura, au bout de quelques jours, la probabilité la plus élevée ?*

   Corrigé : *Les probabilités a_n, b_n et c_n convergent (rapidement) vers respectivement $8, 9$ et 3 vingtièmes, donc au bout de quelques jours c'est Béatrice qui aura la préférence de Julie.*

Exercice 2 *Une urne contient $a > 1$ boules blanches et $b > 1$ boules noires. Un opérateur tire une boule de l'urne. Si la boule tirée est blanche il la remet dans l'urne, par contre si elle est noire il la garde et la remplace dans l'urne par une boule blanche. L'opérateur procède à cette même opération $n \geq 1$ fois de suite.*
On désignera par X_n la variable aléatoire "nombre de boules noires tirées en n opérations" et par A_n l'évènement "une boule noire est tirée lors de la nième opération".

1. *Montrez que $X_n \in [0, \min(n, b)]$.*

   Corrigé : *A l'issue de la nième opération, il est clair que l'opérateur ne peut avoir tiré au plus que n boules donc $X_n \leq n$ et et au plus que b noires, puisqu'il n'y en a que b au départ et donc $X_n \leq b$.*

2. *Pour $k > 1$, démontrez la relation :*

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{a+k}{a+b} P(X_n = k) + \frac{b-k+1}{a+b} P(X_n = k-1)$$

   Corrigé : *L'évènement $\{X_{n+1} = k\}$ est l'union disjointe des évènements $A = \{$on avait k noires au nième tirage et on a tiré une blanche$\}$, et $B = \{$on avait $k-1$ noires au nième tirage et on a tiré une noire$\}$.*
   Les tirages étant indépendants, $P(A) = P(X_n = k) \times \frac{a+k}{a+b}$ car, sous cette hypothèse A, il y a pour ce $(n+1)$ième tirage $a+k$ boules blanches parmi les $a+b$ boules, et d'autre part $P(B) = P(X_n = k-1) \times \frac{b-k+1}{a+b}$ car, sous cette hypothèse B, il reste $b-(k-1)$ boules noires dans l'urne (remarquez que si $b-(k-1) < 0$, $P(X_n = k-1)$ est nul).

3. *En déduire que*

$$E(X_{n+1}) = \frac{a+b-1}{a+b} E(X_n) + \frac{b}{a+b}$$

   Corrigé : *Par définition $E(X_{n+1}) = \sum_{k \geq 0} kP(X_{n+1} = k)$, soit :*

$$E(X_{n+1}) = \sum_{k \geq 0} \frac{a+k}{a+b} kP(X_n = k) + \sum_{k \geq 0} \frac{b-k+1}{a+b} kP(X_n = k-1)$$

   La première somme S_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{a}{a+b} \sum_{k \geq 0} kP(X_n = k) + \frac{1}{a+b} \sum_{k \geq 0} k^2 P(X_n = k) \\ &= \frac{a}{a+b} E(X_n) + \frac{1}{a+b} E(X_n^2) \end{aligned}$$

La deuxième somme S_2 s'écrit :

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k\geq 0} \frac{b-k+1}{a+b} kP(X_n = k-1) \\
S_2 &= \sum_{k\geq 1} \frac{b-k+1}{a+b} (k-1)P(X_n = k-1) + \sum_{k\geq 1} \frac{b-k+1}{a+b} P(X_n = k-1) \\
S_2 &= \sum_{k\geq 0} \frac{b-k}{a+b} kP(X_n = k) + \sum_{k\geq 0} \frac{b-k}{a+b} P(X_n = k) \\
S_2 &= \frac{b}{a+b} E(X_n) - \frac{1}{a+b} E(X_n^2) + \frac{b}{a+b} - \frac{1}{a+b} E(X_n)
\end{aligned}
$$

d'où le résultat demandé puisque $E(X_n) = S_1 + S_2$.

4. *Vérifiez que :*

$$(E(X_{n+1}) - L) = \frac{a+b-1}{a+b} \left(E(X_n) - L\right), \text{ avec } L = \frac{a+b-1}{a+b} L + \frac{b}{a+b}$$

en déduire $E(X_n)$ en fonction de a, b et n et sa limite quand n tend vers l'infini.

Corrigé *: En soustrayant l'expression donnant $E(X_{n+1})$ et celle donnant L, on vérifie facilement la formule proposée, par ailleurs on trouve $L = b$. On en déduit :*

$$E(X_n) = b + \left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^{(n-1)} (E(X_1) - b))$$

mais $E(X_1) = 0 \times \frac{a}{a+b} + 1 \times \frac{b}{a+b} = \frac{b}{a+b}$ et donc :

$$E(X_n) = b\left(1 - \left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^n\right)$$

ainsi $E(X_n)$ a pour limite b quand n tend vers l'infini ; après un grand nombre de tirages on aura retiré toutes les boules noires.

5. *On pose, pour $n \geq 2$, $D_n = X_n - X_{n-1}$. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire D_n ? Donnez la loi de probabilité de D_n en fonction de $P(A_n)$.*

Corrigé *: D_n prend les valeurs 0 ou 1, la valeur 1 (une noire de plus) avec la probabilité $P(A_n)$ et la valeur 0 (même nombre de noires) avec la probabilité $(1 - P(A_n))$, elle suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $P(A_n)$.*

6. *Déduisez de $E(D_n)$ la probabilité $P(A_n)$ en fonction de a, b et n.*

Corrigé *: D'une part $E(D_n) = 1 \times P(A_n) + 0 \times (1 - P(A_n)) = P(A_n)$, et d'autre part $E(D_n) = E(X_n) - E(X_{n-1}) = \frac{b}{a+b}\left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^{(n-1)}$ d'où :*

$$P(A_n) = \frac{b}{a+b}\left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^{(n-1)}$$