Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
Licence SPI - L2 - S4
C. Basdevant

# Corrigé de l'examen du 25 juin 2013

Durée : 3h

*Une unique feuille recto-verso de notes personnelles est autorisée. Les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés*

**Exercice 1** *On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel $L$ engendré par les vecteurs $l_1 = (1,1,1,1)$, $l_2 = (1,-1,1,-1)$ et $l_3 = (1,3,1,3)$ et le sous-espace $M$ engendré par les vecteurs $m_1 = (1,2,0,2)$, $m_2 = (1,2,1,2)$ et $m_3 = (3,1,3,1)$.*

1. *Déterminez la dimension de $L$ et donnez une base de $L$.*

   **Corrigé** *: Regardons si les vecteurs $l_1$, $l_2$ et $l_3$ sont libres. En posant $\alpha l_1+\beta l_2+\gamma l_3 = 0$ on trouve comme solution possible $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$, les 3 vecteurs sont liés, par contre on vérifie facilement que $l_1$ et $l_2$ sont libres, ils forment une base de $L$ qui est de dimension 2.*

2. *Déterminez la dimension de $M$ et donnez une base de $M$.*

   **Corrigé** *: Regardons si les vecteurs $m_1$, $m_2$ et $m_3$ sont libres. En posant $\alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3 = 0$ on trouve comme unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$, les 3 vecteurs sont libres et forment une base de $M$ qui est de dimension 3.*

3. *Déterminez si $l_1 \in M$.*

   **Corrigé** *: Cherchons des coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que $l_1 = \alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3$, on trouve comme unique solution $\alpha = 0$, $\beta = \frac{2}{5}$, $\gamma = \frac{3}{5}$, donc $l_1 \in M$.*

4. *En déduire les dimensions de $L \cap M$ et de $L + M$.*

   **Corrigé** *: On vérifie que $l_2 \in M$ et on déduit des questions précédentes que $L \subset M$ et donc $L \cap M = M$ et $L + M = M$*

**Exercice 2** *Soit la matrice $3 \times 3$ : $A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 7 \\ 0 & 2 & 22 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et la matrice $2 \times 2$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*

1. *Un et un seul des énoncés suivants est vrai. Déterminez lequel en justifiant votre réponse*
   (a) *La matrice $A$ est diagonalisable.*
   (b) *La matrice $A$ est semblable à une matrice triangulaire mais pas à une matrice diagonale.*
   (c) *La matrice $A$ n'est pas semblable à une matrice triangulaire.*
2. *Même question pour la matrice $B$*

**Exercice 3** *On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :*

$$(S)\ \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{array}\right.$$

*avec $u_0 = 2, v_0 = 1$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$*

1. *Déterminez la matrice $A$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.*
2. *Diagonalisez $A$ et en déduire $A^n$.*
3. *En déduire $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.*

**Exercice 4** *La coupe du monde de football de 2014 aura lieu au Brésil. On suppose que la France y participe.*
*Dans une telle compétition l'équipe de France gagne son premier match avec une probabilité de 0,25. De plus si le premier match est gagné, elle gagne le second match avec une probabilité de 0,5. Par contre, si elle a perdu son premier match elle gagne le second avec une probabilité de 0,1. On supposera qu'il ne peut y avoir de match nul.*

1. *Quelle est la probabilité pour la France de gagner son second match ?*

   **Corrigé** *: Soit A l'évènement "La France gagne son premier match" et B l'évènement "Elle gagne son second match". L'énoncé nous dit : $P(A) = 0,25$, $P(B|A) = 0,5$ et $P(B|A^c) = 0,1$. On demande de calculer $P(B)$, la formule des probabilités totales nous dit : $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$, soit $P(B) = 0,5 \times 0,25 + 0,1 \times 0,75 = 0,2$.*

2. *Quelle est la probabilité pour la France de gagner les deux matchs ?*

   **Corrigé** *: On demande de calculer $P(A \cap B)$, la formule des probabilités conditionnelles permet cela : $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$, soit $P(A \cap B) = 0,5 \times 0,25 = 0,125$.*

3. *Quelle est la probabilité que la France ait gagné le premier match sachant qu'elle a remporté le second ?*

   **Corrigé** *: On demande de calculer $P(A|B)$, la formule de Bayes, comme la formule des probabilités conditionnelles, permet cela, par exemple pour cette dernière : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$, soit $P(A|B) = \frac{0,5\times 0,25}{0,2} = 0,625$.*

**Exercice 5** *On considère un dé cubique pipé (c'est à dire truqué ou déséquilibré), de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée $k$ est proportionnelle à $k$. Ainsi, si $Y$ dénote la variable aléatoire associée au résultat du lancer de ce dé, on a, pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(Y = k) = ck$, où $c$ est une constante à déterminer.*

1. *Montrez que $c = \frac{1}{21}$ pour que cette définition soit bien une probabilité.*

   **Corrigé** *: Il faut, d'une part vérifier $P(Y = k) \geq 0$, $\forall k$, ce qui sera le cas si $c \geq 0$, et imposer que $\sum_{k=1}^{6} P(Y = k) = 1$, ce qui donne $c = \frac{1}{21}$.*

2. *Calculez l'espérance et la variance de $Y$.*

   **Corrigé** : $E(Y) = \sum_{k=1}^{6} kP(Y=k) = c\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{6\times7\times13}{21\times6} = \frac{13}{3}$.
   $E(Y^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2P(Y=k) = c\sum_{k=1}^{6} k^3 = \frac{6^2\times7^2}{21\times4} = 21$.
   $Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 21 - (\frac{13}{3})^2 = \frac{20}{9}$.

3. *On lance maintenant indéfiniment le même dé pipé jusqu'à obtenir un 6. Soit $Z$ la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.*

   (a) *Quel est l'ensemble des valeurs prises par $Z$*

   **Corrigé** : $Z \in \mathbb{N}^*$

   (b) *Donnez la loi de probabilité de $Z$.*

   **Corrigé** : *$Z$ suit la loi géométrique de paramètre $p = P(Y=6)$ soit $\mathcal{G}(\frac{2}{7})$, donc $P(Z=n) = \frac{2}{7}(\frac{5}{7})^{n-1}$.*

   (c) *Calculez la probabilité que le 6 sorte en 3 coups au plus (on pourra laisser le résultat sous forme d'une fraction irréductible).*

   **Corrigé** : $P(Z \leq 3) = \sum_{n=1}^{3} P(Z=n) = \frac{2}{7}(\frac{5}{7})^0 + \frac{2}{7}(\frac{5}{7})^1 + \frac{2}{7}(\frac{5}{7})^2 = \frac{218}{343} \approx 0.6356$

   (d) *Donnez l'espérance et la variance de $Z$.*

**Corrigé** : $E(Z) = \frac{1}{p} = \frac{7}{2}$, $Var(Z) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{35}{4}$.