Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2013-2014
Licence SPI - ATS - L2 - S4
C. Basdevant - R. Molinier

Corrigé de l'examen partiel du 11 mars 2014

Durée : 3h

Une unique feuille recto-verso de notes personnelles est autorisée. Les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1 *Soit la matrice* 3×3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 7 \\ 0 & 2 & 22 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et les matrices* 2×2 $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pour chacune des trois matrices A, B et C répondre par oui ou par non à chacune des affirmations suivantes en justifiant vos réponses

1. *La matrice est semblable à une matrice diagonale réelle.*
2. *La matrice est semblable à une matrice triangulaire réelle.*

Exercice 2 *Soit A la matrice* 2×2 : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

1. *Déterminez les valeurs propres de A.*

   Corrigé : *Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A :*

   $$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(-3 - \lambda) + 8) = \lambda^2 - 1$$

   Ses deux racines $\lambda_1 = +1$ et $\lambda_2 = -1$ sont les valeurs propres de A. Ces valeurs propres sont réelles et distinctes, les vecteurs propres associés forment une partie libre, la matrice est donc diagonalisable

2. *Déterminez une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A.*

   Corrigé : *Les vecteurs propres $X = (x, y)$ associés à une valeur propre λ de A vérifient $AX = \lambda X$, soit pour λ_1, $3x - 2y = x$ et $4x - 3y = y$ qui se ramènent à $x - y = 0$ on peut alors choisir $X_1 = (1, 1)$; pour λ_2 on a $3x - 2y = -x$ et $4x - 3y = -y$ qui se ramènent à $2x - y = 0$ on peut alors choisir $X_2 = (1, 2)$.*

3. *Déterminez une matrice P qui diagonalise A (i.e. telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale).*

   Corrigé : *Les deux vecteurs propres X_1 et X_2 forment une base et la matrice de passage P de la base X_1, X_2 à la base canonique est $P = \begin{pmatrix} X1 & X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule alors la matrice inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

4. *En déduire A^{2n} et A^{2n+1} pour $n \geq 1$.*

   Corrigé *: Comme $A = PDP^{-1}$ on en déduit $A^n = PD^nP^{-1}$. Puisque $D^{2n} = I$ on obtient $A^{2n} = I$, et puisque $D^{2n+1} = D$ on obtient $A^{2n+1} = A$.*

5. *On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies par récurrence par :*

$$\left| \begin{array}{l} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - 3v_n \end{array} \right.$$

   et vérifiant les conditions initiales : $u_0 = 1$, $v_0 = -1$. Calculez (u_n) et (v_n) selon la parité de n.

   Corrigé *: En posant $X_n = (u_n, v_n)$, l'équation de récurrence s'écrit $X_{n+1} = AX_n$, on en déduit $X_n = A^nX_0$ et donc d'après les résultats précédents $X_{2n} = X_0$ et $X_{2n+1} = AX_0$. Soit $X_{2n} = (1, -1)$ et $X_{2n+1} = (5, 7)$.*

Exercice 3 *Résoudre le système différentiel*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - y \\ y' = -3x - 2y - 5z \\ z' = x + y + 2z \end{array} \right.$$

Exercice 4 *Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Pour P et Q dans E, on pose :*

$$< P, Q >= \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x)dx$$

1. *Vérifiez qu'il s'agit d'un produit scalaire.*
2. *En partant de la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E construisez une base orthonormale de E. (Polynômes de Legendre)*