Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2013-2014
Licence SPI - L2 - S4
C. Basdevant

Corrigé de l'examen du 20 mai 2014

Durée : 3h

Une unique feuille recto-verso de notes personnelles est autorisée. Les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés

Avertissement : *Tous les résultats devront être justifiés par des explications faisant explicitement référence aux notions abordées dans le cours*

Exercice 1 *Lors d'un examen d'histoire-géographie un étudiant doit répondre à 20 questions d'histoire ou de géographie tirées au hasard. A chaque tirage l'étudiant a une probabilité* $1/3$ *de tomber sur une question de géographie et ceci indépendamment des autres questions sur lesquelles il est interrogé. Au vu de ses révisions l'étudiant a une probabilité* $3/5$ *de bien répondre s'il tombe sur une question d'histoire alors qu'il ne répond bien qu'avec une probabilité* $1/3$ *s'il tire une question de géographie. Il tire une première question.*

1. *Calculez la probabilité qu'il réponde bien à cette première question.*

   Corrigé *: Soit H l'évènement "L'étudiant tire une question d'histoire", $G = \bar{H}$ l'évènement "L'étudiant tire une question de géographie" et B l'évènement "L'étudiant répond bien à la question". D'après l'énoncé, $P(G) = 1/3$, $P(B/H) = 3/5$ et $P(B/G) = 1/3$. La formule des probabilités totales donne alors :*

   $$P(B) = P(B/H)P(H) + P(B/G)P(G) = \frac{3}{5} \times (1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{23}{45}$$

2. *Calculez la probabilité qu'il ait tiré une question d'histoire, sachant qu'il a mal répondu.*

   Corrigé *: On demande la probabilité conditionnelle $P(H/\bar{B})$, on l'obtient en utilisant la formule de Bayles :*

   $$P(H/\bar{B}) = P(\bar{B}/H)\frac{P(H)}{P(\bar{B})} = \frac{(2/5) \times (2/3)}{22/45} = \frac{6}{11}$$

   L'examen étant composé de 20 question, l'étudiant obtient un point à chaque question bien répondue et zéro point aux autres. Ceci lui donne une note comprise entre 0 et 20 que l'on appellera X.

3. *Donnez la loi de X.*

   Corrigé *: X compte le nombre de succès quand on réalise 20 épreuves indépendantes qui ont chacune une probabilité $P(B)$ de succès. X suit donc une loi binomiale de paramètres 20 et $23/45$ soit pour $k \in \{0, \cdots, 20\}$*

$$P(X = k) = \binom{20}{k} \left(\frac{23}{45}\right)^k \left(\frac{22}{45}\right)^{20-k}$$

4. *A quelle note l'étudiant peut-il s'attendre en moyenne ?*

   Corrigé *: $E(X) = 20 \times 23/45 = 92/9 \approx 10,2$*

5. *Il s'avère que l'étudiant a tiré 20 questions de géographie. Sachant cela quelle est la probabilité qu'il obtienne $20/20$? Et $10/20$? (On ne demande pas une valeur numérique, on se contentera d'une formule).*

   Corrigé *: X suit maintenant une loi binomiale de paramètres 20 et $1/3$, on a alors $P(X = 20) = \left(\frac{1}{3}\right)^{20} \approx 2,9\,10^{-10}$ et $P(X = 10) = \binom{20}{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0,054$*

   Finalement l'étudiant obtient une note de $8/20$, il est donc convoqué pour un oral de rattrapage. Le professeur l'interroge alors uniquement sur des questions d'histoire et lui pose des questions jusqu'à ce que l'étudiant réponde correctement à l'une d'entre elles. Soit Y le nombre de questions posées par le professeur.

6. *Déterminez la loi de Y.*

   Corrigé *: On répète maintenant des épreuves aléatoires qui ont chacune une probabilité de succès de $3/5$ et Y compte le nombre d'épreuves jusqu'au premier succès. Y suit donc une loi géométrique de paramètre $3/5$, soit pour $k \geq 1$*

$$P(Y = k) = \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{k-1} \frac{3}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \frac{3}{5}$$

7. *L'étudiant est recalé si l'étudiant n'a pas répondu correctement aux trois premières questions. Calculez la probabilité que l'étudiant soit recalé.*

   Corrigé *: On demande $P(Y > 3)$, or d'après le cours pour une loi géométrique de paramètre p, $P(Y > N) = (1-p)^N$, on obtient ainsi $P(Y > 3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125} \approx 0,064$.*

Exercice 2 *On dispose de trois urnes, U_1, U_2 et U_3. L'urne U_1 contient 3 boules rouges et 3 blanches, l'urne U_2 contient 2 boules rouges et 4 blanches, l'urne U_3 contient 4 boules rouges et 2 blanches. On effectue 2 tirages :*

- *Premier tirage : on tire 2 boules simultanément de l'urne U_1.*
- *Deuxième tirage : on tire une boule, si on a obtenu une ou deux blanches au premier tirage on effectue ce deuxième tirage dans l'urne U_2, sinon on l'effectue dans l'urne U_3.*

On note X le nombre de boules blanches obtenues au premier tirage, Y le nombre de boules blanches obtenues au deuxième tirage et $Z = X + Y$ le nombre total de boules blanches à l'issue des deux tirages.

1. *Déterminez la loi de probabilité de X et son espérance.*

   Corrigé : *On tire deux boules parmi 6, le cardinal de l'univers est donc $\binom{6}{2}$, la loi de X est ainsi :*

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}}$	$\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{\binom{6}{2}}$
$P(X = x)$	$1/5$	$3/5$	$1/5$

   $\mathrm{E}(X) = 0 \times \dfrac{1}{5} + 1 \times \dfrac{3}{5} + 2 \times \dfrac{1}{5} = 1.$

2. *Calculez la loi du couple (X, Y). En déduire la loi et l'espérance de Y.*

   Corrigé : *La probabilité de tirer une boule blanche dans U_2 est $4/6$ et dans U_3 $2/6$, une fois le premier tirage fait le second dans l'urne désignée est indépendant, aussi les probabilités des deux tirages successifs se multiplient-elles, la loi de couple est donc :*

X \ Y	0	1	*Loi de X*
0	$1/5 \times 2/3 = 2/15$	$1/5 \times 1/3 = 1/15$	$1/5$
1	$3/5 \times 1/3 = 3/15$	$3/5 \times 2/3 = 6/15$	$3/5$
2	$1/5 \times 1/3 = 1/15$	$1/5 \times 2/3 = 2/15$	$1/5$
Loi de Y	$2/5$	$3/5$	

   L'espérance de Y est donc $\mathrm{E}(Y) = 3/5$.

3. *Calculez la covariance de X et Y.*

   Corrigé : *D'après le cours $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, aussi $\mathrm{E}(XY) = 0 \times 0 \times \dfrac{2}{15} + 0 \times 1 \times \dfrac{1}{15} + 1 \times 0 \times \dfrac{3}{15} + 1 \times 1 \times \dfrac{6}{15} + 2 \times 0 \times \dfrac{1}{15} + 2 \times 1 \times \dfrac{2}{15} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$, d'où $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{15}$*

4. *Déterminez la loi de probabilité de Z et calculez son espérance de deux manières différentes.*

   Corrigé : *Pour obtenir $P(Z = s)$, à partir de la loi de couple on somme les probabilités de $P((X, Y) = (x, y))$ pour tous les couples (x, y) tels que $x + y = s$ (qui sont des évènements incompatibles), soit*

s	0	1	2	3
$P(Z = s)$	$2/15$	$1/15 + 3/15 = 4/15$	$1/15 + 6/15 = 7/15$	$2/15$

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = \frac{8}{5}, \textit{ et on vérifie que } \mathrm{E}(Z) = 0 \times \frac{2}{15} + 1 \times \frac{4}{15} + 2 \times \frac{7}{15} + 3 \times \frac{2}{15}.$$

Exercice 3 *Résoudre le système différentiel*

$$\begin{cases} x' = 13x - y - 71z \\ y' = -5x - 4y \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

avec $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 0$.

Corrigé : La matrice du système est : $A = \begin{pmatrix} 13 & -1 & -71 \\ -5 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, elle a pour valeurs propres $\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = 2\,, \lambda_3 = 7$ et comme vecteurs propres associés $V_1 = \begin{bmatrix} 71 \\ -71 \\ 13 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$. La solution générale du système s'écrit donc :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i e^{\lambda_i t} V_i = \alpha_1 e^t \begin{bmatrix} 71 \\ -71 \\ 13 \end{bmatrix} + \alpha_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 e^{7t} \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En faisant $t = 0$ dans ce système on obtient le système linéaire :

$$\begin{cases} 71\alpha_1 + 6\alpha_2 + 11\alpha_3 = 1 \\ -71\alpha_1 - 5\alpha_2 - 5\alpha_3 = 2 \\ 13\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $\alpha_1 = -\frac{1}{3}$, $\alpha_2 = \frac{23}{5}$, $\alpha_3 = -\frac{4}{15}$,soit

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{71}{3}e^t + \frac{138}{5}e^{2t} - \frac{44}{15}e^{7t} \\ y(t) = \frac{71}{3}e^t + \frac{23}{1}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{7t} \\ z(t) = -\frac{13}{3}e^t + \frac{23}{5}e^{2t} - \frac{4}{15}e^{7t} \end{cases}$$