Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2014-2015
Licence SPI - ATS - L2 - S4
C. Basdevant - R. Molinier

Corrigé de l'examen partiel du 10 mars 2015

Durée : 3h

Une unique feuille recto-verso de notes personnelles est autorisée. Les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1 *Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice 2×2 :* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$

1. *Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ? (justifiez votre réponse).*

   Corrigé *: Le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = \lambda^2 - (1+a)\lambda + a$, c'est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = (1-a)^2$. Ainsi si $a \neq 1$ A possède deux valeurs propres réelles distinctes et est donc diagonalisable, par contre si $a = 1$, $\lambda = 1$ est valeur propre de multiplicité 2 et A n'est pas diagonalisable car sinon elle serait semblable (et donc égale) à la matrice identité ce qui n'est pas le cas.*

2. *Lorsque A est diagonalisable, calculez A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*

   Corrigé *: Si $a \neq 1$, les deux valeurs propres sont $\lambda = 1$ et $\lambda = a$, on détermine des vecteurs propres associés, soit $U_1 = (1, 1)$ et $U_a = (1, a)$, alors on a $D = P^{-1}AP$ avec :*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   On en déduit $A^n = PD^nP^{-1}$, soit :

$$\text{avec } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, \quad A^n = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a - a^n & a^n - 1 \\ a - a^{n+1} & a^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

3. *On suppose $a \neq 1$, et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et*

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

   Calculez u_n en fonction de n et a.

   Corrigé *: Posons $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ alors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -au_n + (1+a)u_{n+1} \end{pmatrix} = AU_n$ et par récurrence $U_n = A^nU_0$, soit :*

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a - a^n & a^n - 1 \\ a - a^{n+1} & a^{n+1} - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et donc $u_n = \dfrac{a^n + a - 2}{a - 1}$.

Alternativement, on pouvait aussi traiter la suite u_n comme une suite récurrente à 2 termes. On sait que ses solutions forment un espace vectoriel de dimension 2 dont on cherche une base sous la forme de solutions $u_n = r^n$, r étant racine de l'équation caractéristique : $r^2 = (1+a)r - a$, soit $r = 1$ et $r = a$, donc, puisque $a \neq 1$, les solutions sont de la forme $u_n = \alpha 1^n + \beta a^n$, il reste alors à déterminer α et β pour respecter les deux conditions initiales.

Exercice 2 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Montrez que f est trigonalisable (à ce niveau on ne demande pas de trigonaliser A).*

   Corrigé : *Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A :*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}, \quad \text{avec } C_1 \rightarrow C_1 + C_2$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\text{avec } L_2 \rightarrow L_2 + L_1, \quad P_A(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

   d'où $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$. Le polynôme caractéristique est scindale, ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit trigonalisable. Note : à ce stade on ne peut sans calcul supplémentaire décider si A est ou non diagonalisable.

2. *Montrez que l'espace propre associé à la valeur propre 1 de A est de dimension 1.*

   Corrigé : *Cherchons le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$, soit trouver $X = (x, y, z)$ tel que $AX = X$. On obtient $x = y$ et $z = 0$, c'est bien un sous-espace de dimension 1, en effet une fois x choisi les autres coordonnées sont déterminées.*

3. *Montrez que si on pose $v = (0, 0, 1)$ et $u = (f - Id)(v)$ (où Id est l'identité de $\mathbb{R}^3$), alors u est vecteur propre de A pour la valeur propre 1.*

   Corrigé : *Un calcul simple montre que $u = (f - Id)(v) = (1, 1, 0)$, u est bien dans le sous-espace propre de la valeur propre 1.*

4. *Trouvez un vecteur propre w associé à la valeur propre 2 de A. Montrez que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.*

   Corrigé : *Cherchons le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$, soit trouver $X = (x, y, z)$ tel que $AX = 2X$. On obtient $x = z$ et $y = 0$, on peut prendre*

$w = (1, 0, 1)$.
Pour vérifier que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de vérifier qu'elle est libre puisque c'est une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension trois. Pour vérifier qu'elle est libre on peut par par exemple montrer que son déterminant est non nul :

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

5. *Calculez la matrice T de f dans la base (u, v, w).*

   Corrigé *: On sait que les colonnes de T sont les coordonnées, dans la base (u, v, w), des images par f des vecteurs de la base (u, v, w).*
   Calculons donc ces images. $f(u) = u$ donc la première colonne sera $(1, 0, 0)$ qui sont les cordonnées de u dans la base (u, v, w). D'après la question 3, $f(v) = u + v$ et donc la deuxième colonne sera $(1, 1, 0)$. Enfin $f(w) = 2w$ et la troisième colonne $(0, 0, 2)$, d'où :

   $$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Alternativement on pouvait aussi calculer T au moyen de la matrice P de passage de la base canonique à la base (u, v, w), soit $T = P^{-1}AP$. On trouvera P dans le corrigé de la question 7.

6. *Calculez $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k.*

   Corrigé *: On a $f(v) = u + v$ et $f^2(v) = f(u) + f(v) = 2u + v$. Vérifions par récurrence que $f^k(v) = ku + v$; l'hypothèse est vraie pour $k = 1$, supposons la vraie pour k et calculons pour $k+1$: $f^{k+1}(v) = f(ku+v) = kf(u)+f(v) = ku+u+v = (k+1)u+v$ cqfd. Par ailleurs $f^k(u) = u$ et $f^k(w) = 2^k w$, d'où T^k la matrice de f^k dans la base (u, v, w) :*

   $$T^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

7. *Calculez A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

   Corrigé *: T est semblable à A, $T = P^{-1}AP$ avec P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w), les colonnes de P sont les coordonnées de ces trois vecteurs dans la base canonique et on calcule facilement P^{-1}, soit :*

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   De $A = PTP^{-1}$ on déduit par récurrence que $A^k = PT^kP^{-1}$ soit tous calculs faits :

   $$A^k = \begin{pmatrix} 2^k - k & 1 + k - 2^k & k \\ -k & 1 + k & k \\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & k \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *On considère le système différentiel :*

$$(S)\ \begin{cases} x' = 5x - y + 9z \\ y' = 3x + 4y \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

où x, y, z sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 0$. Calculez sa solution $x(t), y(t), z(t)$ pour tout t.

Corrigé *: En posant $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, le système s'écrit $X'(t) = AX(t)$ avec A la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs propres de A, pour cela calculons son polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 9 \\ 3 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}, \quad \textit{avec } L_2 \to L_2 - 3L_3$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 9 \\ 0 & 1-\lambda & -3(1-\lambda) \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\textit{avec } C_2 \to 3C2 + C_3, \quad 3P_A(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 4-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-7)$$

Note : on aurait pu aussi bien développer brutalement le déterminant par la règle de Sarrus pour trouver $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 23\lambda + 14$ et voir que $\lambda = 1$ était racine et après factorisation par $(\lambda - 1)$ trouver les deux autres racines.
Le polynôme caractéristique étant totalement décomposable avec trois racines simples (1,2 et 7) on sait que A est diagonalisable. Il reste à déterminer les vecteurs propres, soit trouver U_λ tel que $AU_\lambda = \lambda U_\lambda$ pour chacune des trois valeurs propres. On trouve facilement (à des facteurs multiplicatifs près) :

$$U_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_7 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant la solution générale du système différentiel est donnée par :

$$X(t) = \alpha e^t U_1 + \beta e^{2t} U_2 + \gamma e^{7t} U_7$$

Il reste à déterminer α, β, γ pour satisfaire la condition initiale $X(0) = (1, 2, 0)$, soit :

$$\alpha \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $\alpha = -\frac{1}{3}, \beta = \frac{7}{5}, \gamma = \frac{4}{15}$, *ainsi la solution est :*

$$\begin{aligned} x(t) &= 3e^{t} - \frac{14}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{7t} \\ y(t) &= -3e^{t} + \frac{21}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{7t} \\ z(t) &= -\frac{5}{3}e^{t} + \frac{7}{5}e^{2t} + \frac{4}{15}e^{7t} \end{aligned}$$