Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2014-2015
Licence SPI - L2 - S4
C. Basdevant

Corrigé de l'examen du 19 mai 2015

Durée : 3h
Une unique feuille recto-verso de notes personnelles manuscrites est autorisée.

Avertissement : *Tous les résultats devront être justifiés par des explications faisant explicitement référence aux notions abordées dans le cours*

Exercice 1 *Le gardien d'un immeuble détient un trousseau constitué des clés de m appartements de sa résidence. Dans ce trousseau il y a une et une seule clé par appartement et elles sont indistinctes au toucher. Une nuit d'orage, l'électricité étant coupée, Monsieur François Pignon rentre chez lui ayant perdu ses clés ; il demande au gardien de lui ouvrir sa porte.*

1. *Le gardien essaie une clé au hasard ; si elle n'ouvre pas la porte, il la remet dans le trousseau et réessaie avec une clé prise au hasard dans le trousseau complet ; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ouvre la porte (ou pas).*
   (a) *Quelle est la probabilité p que le gardien ouvre la porte du premier coup ?*

   Corrigé *: les clés étant équiprobables, la probabilité qu'il tombe sur la bonne au premier coup est $p = \frac{1}{m}$.*

   (b) *Quelle est la probabilité que le gardien ouvre la porte au cinquième essai ?*

   Corrigé *: Pour qu'il ouvre la porte au cinquième essai, il a fallu qu'il se trompe de clés 4 quatre fois avant de trouver la bonne, les tirages étant indépendants, cette probabilité est $q = (1-p)^4 p$.*

   (c) *Quelle est la probabilité qu'il fasse au moins 100 essais ?*

   Corrigé *: Soit X la variable aléatoire donnant le numéro de l'essai efficace, c'est à dire $X = n$ si la porte s'ouvre au n-ième essai, X suit une loi géométrique de paramètre p soit : $P(X = n) = (1-p)^{(n-1)}p$. On sait que pour une loi géométrique de paramètre p on a $P(X > N) = (1-p)^N$. Aussi s'il doit faire au moins 100 essais $P(X \geq 100) = (1-p)^{99}$.*

   (d) *Quelle est la probabilité que le gardien n'ouvre jamais la porte ?*

   Corrigé *: La probabilité que le gardien n'ouvre jamais la porte est la limite quand N tend vers l'infini de $P(X > N)$, elle est donc nulle.*

2. *On suppose maintenant que le gardien ne remet pas dans le trousseau les clés essayées. Donnez la loi de probabilité du nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte de Monsieur Pignon ainsi que son espérance mathématique et sa variance.*

Corrigé : *La loi de probabilité du nombre X d'essais nécessaires est la loi uniforme sur $[1, m]$, ainsi l'espérance est $E(X) = \frac{m+1}{2}$ et la variance $\mathrm{Var}(X) = \frac{m^2-1}{12}$. En effet :*

$$P(X = 1) = \frac{1}{m}$$

$$P(X = 2) = \frac{m-1}{m} \times \frac{1}{m-1} = \frac{1}{m}$$

$$P(X = n) = \frac{m-1}{m} \times \frac{m-2}{m-1} \times \frac{m-3}{m-2} \times \cdots \frac{m-(n-1)}{m-n} \times \frac{1}{m-(n-1)} = \frac{1}{m}$$

Explication : au k-ième essai il lui reste $m-(k-1)$ clés à tester, il a alors une probabilité $\dfrac{1}{m-(k-1)}$ de la trouver et $\dfrac{m-k}{m-(k-1)}$ de ne pas la prendre. Ces choix successifs étant indépendants, les probabilités d'échec se multiplient pour $1 \leq k \leq (n-1)$, multiplié ensuite par la probabilité de succès au n-ième essai.

Exercice 2 *Aux États-Unis, une maladie se développant lors du stade embryonnaire touche statistiquement 2% des poulets à la naissance. Un laboratoire a mis au point un test pour diagnostiquer cette maladie dès les premiers jours de vie d'un poulet. Si un poulet contaminé est dépisté rapidement, un simple traitement antiviral peu coûteux peut le guérir. Par contre si la maladie du poulet n'est pas dépistée par le test, il est trop tard et trop onéreux de traiter le poulet quand les symptômes de la maladie apparaissent, le poulet devenant impropre à la consommation il doit être euthanasié.*

Lors des études en laboratoire du test de dépistage il a été établi que le test de dépistage n'est pas cent pour cent fiable. Le test est positif pour 90% des poulets effectivement porteurs du virus. Et il est négatif pour 92% de l'échantillon des poulets sains.

On note respectivement C et T les événements "Le poulet est contaminé " et "Le poulet a un test positif ".

1. *Traduisez l'énoncé en termes de probabilités.*

   Corrigé : *On sait que 2% des poulets sont contaminés, ce qui s'écrit $P(C) = 0.02$. La phrase "Le test est positif pour 90% des poulets effectivement porteurs du virus" se traduit par $P(T \mid C) = 0.9$.*
   Enfin la phrase "Le test est négatif pour 92% de l'échantillon des poulets sains" se traduit par $P(\bar{T} \mid \bar{C}) = 0.92$.

2. *Un poulet est choisi au hasard. Quelle est la probabilité p que son test soit positif ?*

   Corrigé : *On demande ici la probabilité $p = P(T)$, la formule des probabilités totales permet de la calculer :*

$$P(T) = P(T \mid C)P(C) + P(T \mid \bar{C})P(\bar{C})$$

   Ce qui donne : $p = 0.9 \times 0.02 + (1 - 0.92) \times (1 - 0.02) = 0.0964$

3. *Un poulet est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie ?*

   Corrigé : *On demande la probabilité $P(C \mid T)$; la définition d'une probabilité conditionnelle (ou la formule des Bayes) permet de la calculer :*

$$P(C \mid T) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T \mid C)P(C)}{P(T)}$$

Ce qui donne : $P(C \mid T) = \dfrac{0.9 \times 0.02}{0.0964} \approx 0.1867$

4. *On choisit 5 poulets au hasard. Le nombre total de poulets dans l'exploitation est tel qu'on peut assimiler ces tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de poulets, parmi les 5 choisis, ayant un test positif.*

   (a) *Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? (Exprimez la en fonction de p, on ne demande pas ici de valeurs numériques)*

   Corrigé *: Soit $p = 0.0964$ la probabilité pour qu'un poulet tiré au hasard ait un test positif. Alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, p)$, soit :*

   $$P(X = x) = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x},\ 0 \leq x \leq 5$$

   (b) *Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq poulets ait un test positif ? (Exprimez la en fonction de p, on ne demande pas ici de valeurs numériques)*

   Corrigé *: La probabilité pour qu'au moins un des cinq poulets ait un test positif est* $1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^5$

5. *Le coût des soins à prodiguer à un poulet ayant réagi positivement au test est de 1 dollar alors que le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 4 dollars (ce coût comprend l'élevage de l'animal, son abattage et son incinération). On suppose que le test est gratuit pour l'éleveur (remboursé par la collectivité). On note Y la variable aléatoire du coût à engager par animal.*

   (a) *D'après ce qui précède, montrez que la loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :*

Y=Coût	0	1	4
Probabilité	0.9016	0.0964	0.002

   Corrigé *: $Y = 0$ correspond à l'évènement "le poulet est sain et le test est négatif", soit $\bar{C} \cap \bar{T}$, sa probabilité est donnée par* $P(Y = 0) = P(\bar{T} \mid \bar{C})P(\bar{C}) = 0.92 \times (1 - 0.02) = 0.9016$.
   $Y = 1$ correspond à l'évènement "le test est positif", soit T et donc $P(Y = 1) = P(T) = 0.0964$.
   $Y = 4$ correspond à l'évènement "le test est négatif et le poulet est contaminé", soit $\bar{T} \cap C$ et donc $P(Y = 4) = P(\bar{T} \mid C)P(C) = (1 - 0.9) \times 0.02 = 0.002$.

   (b) *Un éleveur possède un élevage de 2000 poulets. Tout l'élevage est soumis au test. Au total, quelle somme va-t-il dépenser en moyenne ?*

   Corrigé *: En moyenne l'éleveur va dépenser* $2000 \times E(Y) = 2000 \times (0.0964 + 4 \times 0.002) = 208.8\$$

   (c) *Un autre éleveur possédant lui aussi 2000 poulets choisit de ne pas faire tester ses poulets. Quelle somme va-t-il dépenser en moyenne ? Commentez.*

   Corrigé *: Le coût pour l'éleveur qui ne fait pas tester ses poulets sera de 4 dollars par poulet malade, sachant qu'il a en moyenne 2% de poulets malades,* *soit 40 contaminés, en moyenne il devra payer pour les éliminer* $4 \times 40 = 160\$$ *soit une somme nettement inférieure à celle de l'autre éleveur. Le peu d'efficacité du test entraine un coût excessif d'utilisation, en effet on a vu à la question 1 que le test condamne près de 10% des poulets alors qu'on en sait qu'environ 2% de malades.*

Exercice 3 *Un athlète spécialiste du 10 000 mètres participe au championnat régional s'il est arrivé dans les 20 premiers lors de deux courses départementales auxquelles participent les meilleurs coureurs des clubs d'athlétisme.*

On note C_1 *la variable aléatoire qui indique si l'athlète a terminé sa première course dans les vingt premiers avec* $C_1 = 1$ *s'il est dans les vingt premiers et 0 sinon ; on estime sur la base de ses résultats de la saison précédente qu'il a une chance sur deux d'arriver dans les vingt premiers de cette première course.*

On note C_2 *la variable aléatoire qui indique si l'athlète a terminé sa seconde course dans les vingt premiers avec* $C_2 = 1$ *s'il termine dans les vingt premiers et 0 sinon. S'il a terminé dans les vingt premiers lors de la première course, alors la probabilité qu'il renouvelle ce résultat lors de la seconde course est de 0,75. En revanche, s'il a raté sa première course en arrivant après les vingt premiers, alors la probabilité qu'il arrive dans les vingt premiers lors de la seconde course est de 0,4.*

1. *Calculez la probabilité qu'il rate sa seconde course en arrivant après les vingt premiers.*

   Corrigé *: L'énoncé nous dit :* $P(C_1 = 1) = \frac{1}{2}$, $P(C_2 = 1 \mid C_1 = 1) = \frac{3}{4}$ *et* $P(C_2 = 1 \mid C_1 = 0) = \frac{2}{5}$.
   On demande $P(C_2 = 0)$ *; la formule des probabilités totales permet d'écrire :*

   $$P(C_2 = 0) = P(C_2 = 0 \mid C_1 = 1)P(C_1 = 1) + P(C_2 = 0 \mid C_1 = 0)P(C_1 = 0)$$

   Ce qui donne : $P(C_2 = 0) = (1 - \frac{3}{4})\frac{1}{2} + (1 - \frac{2}{5})\frac{1}{2} = \frac{17}{40} = 0.425$.

2. *Déterminez la loi jointe du couple* (C_1, C_2).
   (Indication : on doit trouver $P((C_1, C_2) = (1, 1)) = 3/8$ *et en complétant le tableau avec les lois marginales retrouvez le résultat de la première question).*

   Corrigé *: On doit remplir le tableau suivant :*

C_2 \ C_1	0	1	Loi de C_2
0	-	-	-
1	-	-	-
Loi de C_1	-	-	

   Mais on connait le loi de C_1 *soit* $(1/2, 1/2)$. *On peut calculer* $P((C_1, C_2) = (1, 1)) = P(C_2 = 1 \mid C_1 = 1)P(C_1 = 1) = 3/4 \times 1/2$. *De même on peut calculer* $P((C_1, C_2) = (0, 1)) = P(C_2 = 1 \mid C_1 = 0)P(C_1 = 0) = 2/5 \times 1/2$. *Ce qui donne le tableau :*

C_2 \ C_1	0	1	*Loi de* C_2
0	-	-	-
1	$1/5$	$3/8$	-
Loi de C_1	$1/2$	$1/2$	

Il suffit alors de compléter en assurant des sommes égales à 1 sur les lignes et les colonnes :

C_2 \ C_1	0	1	*Loi de* C_2
0	$3/10$	$1/8$	$17/40$
1	$1/5$	$3/8$	$23/40$
Loi de C_1	$1/2$	$1/2$	

3. *Calculez la covariance de* C_1 *et* C_2.

Corrigé *:* $\mathrm{Cov}(C_1, C_2) = \mathrm{E}(C_1C_2) - \mathrm{E}(C_1)\,\mathrm{E}(C_2)$,
$\mathrm{E}(C_1) = 0 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$,
$\mathrm{E}(C_2) = 0 \times \dfrac{17}{40} + 1 \times \dfrac{23}{40} = \dfrac{23}{40}$,
$\mathrm{E}(C_1C_2) = \sum_{0 \le x,y \le 1} xyP(C_1 = x, C_2 = y) = \dfrac{3}{8}$,
ainsi $\mathrm{Cov}(C_1, C_2) = \dfrac{3}{8} - \dfrac{23}{80} = \dfrac{7}{80} = 0.0875$.

4. *On note* $R = C_1 \times C_2$ *la variable du résultat final de l'athlète : sélectionné s'il est arrivé premier dans les deux courses ou non sélectionné. Donnez la loi de probabilité de* R.

Corrigé *: L'évènement* $R = 1$ *est égal à* $((C_1, C_2) = (1, 1))$ *et donc sa probabilité est* $\dfrac{3}{8}$, *inversement la probabilité de* $R = 0$ *est* $\dfrac{5}{8}$.

Exercice 4 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Calculez A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé *: On détermine successivement :*

- *Les valeurs propres de la matrice soit* $\lambda_1 = 3$ *et* $\lambda_2 = 5$.
- *Les vecteurs propres associés soit :* $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- *Et ainsi la matrice de passage* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ *et son inverse* $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- *On a alors* $A = PDP^{-1}$ *avec* $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ *et donc* $A^n = PD^nP^{-1}$.
- *Ainsi* $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^n + 2 \times 5^n & -3^n + 5^n \\ 2 \times 3^n - 2 \times 5^n & 2 \times 3^n - 5^n \end{pmatrix}$