Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2014-2015
Licence SPI - ATS - L2 - S4
C. Basdevant

Formulaire d'algèbre linéaire

Espaces vectoriels

Dans la suite E désignera un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sous-espaces vectoriels :

- F sous-espace vectoriel de E : $\forall x, y \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda x + \mu y \in F$,
- Sommes et intersections de s.e.v. sont des s.e.v.

Somme directe F et G s.e.v en somme directe

$$\begin{aligned} F \oplus G \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall z \in F+G,\ \exists!\, x \in F,\ \exists!\, y \in G \text{ tels que } x+y=z \\ &\Longleftrightarrow \quad \{x \in F, y \in G \text{ et } x+y=0 \ \Rightarrow\ x=0,\ y=0\} \\ &\Longleftrightarrow \quad F \cap G = \{0\} \end{aligned}$$

Les sous-espaces F et G sont supplémentaires si $F \oplus G = E$.

Sous-espace engendré

$$\begin{aligned} vect(u_1, u_2, \cdots, u_p) \quad &= \quad \left\{ \sum_i \lambda_i\, u_i \right\},\ \lambda_i \in \mathbb{K} \\ &= \quad \text{le plus petit sous-espace contenant tous les } u_i \\ &= \quad \text{l'intersection des sous-espaces contenant tous les } u_i \end{aligned}$$

Famille libre - vecteurs linéairement indépendants

$$(u_1, u_2, \cdots, u_p) \text{ indépendants} \iff \left\{ \sum_i \lambda_i\, u_i = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_i = 0,\ \forall i \right\}$$

Famille génératrice

$$(u_1, u_2, \cdots, u_p) \text{ famille génératrice} \iff \forall x \in E,\ \exists\, \lambda_i,\ \text{ tels que } x = \sum_i \lambda_i\, u_i$$

Base

$$(u_1, u_2, \cdots, u_p) \text{ base de } E \iff \text{la famille est libre et génératrice}$$

Théorème de Meray Si n vecteurs s'expriment en fonction de p vecteurs avec $p < n$, ces n vecteurs sont liés, *i.e.* ils ne sont pas linéairement indépendants.

Théorème de la base incomplète Soit une famille libre de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, avec $p < n$, il est possible d'adjoindre $n-p$ vecteurs de l'espace pour constituer une base. En particulier tout sous-espace de dimension p, avec $p < n$ admet au moins un supplémentaire et tout supplémentaire est de dimension $n-p$.

Matrices

Dans la suite $\mathcal{M}_{m\times n}$ désignera l'espace vectoriel des matrices à m lignes et n colonnes et $\mathcal{M}_m$ l'algèbre unitaire non commutative (espace vectoriel et anneau unitaire) des matrices carrées d'ordre n.

Produit de matrices Si $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p\times n}$, leur produit $C = AB$ est défini et appartient à $\mathcal{M}_{m\times n}$, on a alors :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}, \quad i \text{ indice de ligne, } j \text{ indice de colonne}$$

Matrice transposée Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m\times p}$, sa matrice transposée, notée ${}^t\!A = (b_{i,j})$ est dans $\mathcal{M}_{p\times m}$, et $b_{i,j} = a_{j,i}$.

$${}^t(AB) = {}^t\!B\, {}^t\!A$$

Matrices carrées particulières Soit $A \in \mathcal{M}_n$:
- Matrice inverse d'une matrice inversible A^{-1}
- Matrice symétrique $A = {}^t\!A$
- Matrice triangulaire inférieure $a_{i,j} = 0$ si $j > i$
- Matrice orthogonale ${}^t\!A = A^{-1}$
- Matrice nilpotente $\exists p$ tel que $A^p = 0$

Matrices semblables A et B sont semblables s'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$

Déterminants Le déterminant d'une matrice est une forme multilinéaire alternée de ses colonnes ou de ses lignes.

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A), \quad \det({}^t\!A) = \det(A), \quad \det(AB) = \det(A)\,\det(B)$$

$$\det(A) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; A \text{ inversible } \;\Rightarrow\; \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

$$\det(A) = A\, {}^t Com(A)$$

Valeurs et vecteurs propres :

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A s'il existe $u \neq 0 \in \mathbb{K}^n$ tel que $Au = \lambda\, u$.
Le vecteur u est alors un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
λ valeur propre $\iff$ $(A - \lambda\, I)$ est singulière $\iff$ $\det(A - \lambda\, I) = 0$
L'ensemble des valeurs propres constitue le spectre de la matrice A, ce sont les racines du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I)$.
Le produit des valeurs propres est égal à $\det(A)$, la somme des valeurs propres est égale à $trace(A) = \sum_i a_{i,i}$.
Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et donc mêmes valeurs propres.
Soit u vecteur propre de A pour la valeur propre λ et soit $P(X)$ un polynôme formel à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors u est vecteur propre de $P(A)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.
Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.
Théorème d'Hamilton-Cayley : $\mathcal{P}_A(A) = 0$.

Diagonalisation des matrices carrées :

- La dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre associée.
- Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
- La matrice A est diagonalisable s'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale et alors égale à $diag(\lambda_i)$ où les λ_i sont les valeurs propres de A. P est la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres, la $j^{\text{ème}}$ colonne de P est la colonne des coordonnées dans la base canonique du $j^{\text{ème}}$ vecteur propre de A.
- La matrice A est diagonalisable si et seulement si :
  - Le polynôme caractéristique est totalement décomposable,
  - la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée.
- Si une matrice A réelle a toutes ses valeurs propres réelles et distinctes elle est diagonalisable.

Trigonalisation (ou triangulation) des matrices carrées : Une matrice carrée est trigonalisable s'il existe une matrice semblable qui soit triangulaire inférieure (ou supérieure).

A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est totalement décomposable.

Classification des matrices 2×2 : cas complexe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

- Soit A est diagonalisable
- Soit A n'est pas diagonalisable, elle a une valeur propre double $\lambda = \frac{1}{2} trace(A)$, elle est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Classification des matrices 2×2 : cas réel $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- Soit toutes les valeurs propres sont réelles, alors c'est comme pour les complexes.
- Soit deux valeurs propres complexes conjuguées $a \pm i\, b$, alors A est semblable à la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Applications linéaires

Définition L'application f de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F est linéaire si :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Espaces vectoriels d'applications linéaires :

- $\mathcal{L}(E, F)$ espace vectoriel des applications linéaires de E dans F,
- $\mathcal{L}(E)$ espace vectoriel des applications linéaires de E dans lui même (endomorphismes),
- $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ dual de E, espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$ (formes linéaires),
- Si E est de dimension n et F de dimension p, $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension np.

Images directes et réciproques de sous-espaces :

- L'image par une application linéaire d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel,
- L'image réciproque par une application linéaire d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel,
- Noyau d'une application linéaire : $\ker(f) = f^{-1}(0)$,
- Rang d'une application linéaire = dimension de l'image.

Applications linéaires injectives, surjectives, bijectives :

- f injective $\iff \ker(f) = \{0\} \iff$ l'image d'une partie libre est libre,
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et E de dimension finie, f injective $\iff$ rang de f = dim de E,
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et F de dimension finie, f surjective $\iff$ rang de f = dim de F,
- $f \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension finie, f bijective $\iff f$ injective $\iff f$ surjective,
- $f \in \mathcal{L}(E)$, f projecteur sur un sous-espace $\iff f^2 = f$.

Matrice d'une application linéaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de dimensions finies respectivement n et p, f est parfaitement déterminée par l'image d'une base de E. Des bases étant choisies dans E et F, l'application linéaire f est associée à la matrice $A \in \mathcal{M}_{p\times n}$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des coordonnées dans la base de F de l'image par f du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie n et soit A la matrice de f dans la base (e_i). La matrice de f dans une autre base (f_i) sera $B = P^{-1}AP$ avec P la matrice de passage de la base (e_i) à la base (f_i), c'est à dire la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des coordonnées dans la base (e_i) du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base (f_i).

Diagonalisation d'un endomorphisme :

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, $u \neq 0 \in E$ est vecteur propre de f et $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre associée si $f(u) = \lambda\, u$,
- $\ker(f - \lambda I)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ,
- Le déterminant de f comme son polynôme caractéristique sont ceux de toute matrice associée,
- f est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres, s'il existe une base dans laquelle la matrice est diagonale.

Produit scalaire et norme euclidienne :

Un produit scalaire sur un espace vectoriel E est une application bilinéaire symétrique de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in E,\ <x, x> \geq 0$ et $(<x, x> = 0 \ \Rightarrow\ x = 0)$. La norme associée est $\|x\| = (<x, x>)^{\frac{1}{2}}$,

Inégalité de Cauchy-Schwarz $|<x, y>| \leq \|x\|\,\|y\|$, avec égalité si et seulement si x et y sont liés,

Inégalité triangulaire (Minkowski) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Corollaire $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Orthogonalité :

- x orthogonal à $y \iff x \perp y \iff <x, y> = 0$,
- $A^\perp = \{x \in E \,|\, \forall y \in A\ x \perp y = 0\}$, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel,
- (x_i) famille orthogonale $\iff \forall i \neq j\ x_i \perp x_j$,
- (x_i) famille orthonormale $\iff \forall i \neq j\ x_i \perp x_j$ et $\forall i\ \|x_i\| = 1$,
- $E^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = E$,
- Soit F sous-espace vectoriel, $E = F \oplus F^\perp$, $(F^\perp)^\perp = F$

- Soit F et G des sous-espaces vectoriels, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$,
- (x_i) famille orthogonale avec $\forall i\ x_i \neq 0$, $\Rightarrow$ la famille est libre,
- Théorème de Pythagore : si $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Espaces Euclidiens :
- Un espace Euclidien est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire,
- Une base orthonormale est une base de vecteurs de norme unité orthogonaux deux à deux,
- Une famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale,
- Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt permet de construire une base orthogonale à partir d'une base quelconque, il suffit ensuite de normaliser ses vecteurs pour obtenir une base orthonormale.

Endomorphisme orthogonal :
- Un endomorphisme orthogonal f conserve le produit scalaire $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \ < f(x), f(y) >=< x, y > \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\ \|f(x)\| = \|x\|$$

- L'image par un endomorphisme orthogonal d'une base orthogonale est une base orthogonale,
- La matrice dans une base orthonormale d'un endomorphisme orthogonal est orthogonale : ${}^tMM = I$,
- Les valeurs propres d'un endomorphisme orthogonal sont de module 1.
- Matrices orthogonales en dimension 2, elles sont de deux type, soit :
  - $\det M = +1$ et $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, c'est la matrice de la rotation d'angle θ.
  - $\det M = -1$ et $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, et la matrice est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle d'équation $x\cos(\frac{\theta+\pi}{2}) + y\sin(\frac{\theta+\pi}{2}) = 0$.
  - Une rotation en dimension 2 est le produit de deux symétries orthogonales : $S_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1\, S_2 = R(\theta_1 - \theta_2)$.

Diagonalisation des matrices symétriques :

Une matrice symétrique est diagonalisable en base orthonormale : toutes ses valeurs propres sont réelles, la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Une matrice symétrique A est semi-définie positive si $< Ax, x >= {}^tx\, Ax \geq 0, \forall x$.

Une matrice symétrique A est définie positive si $< Ax, x >= {}^tx\, Ax > 0, \forall x \neq 0$.

Les valeurs propres d'une matrice symétrique semi-définie positive sont positives ou nulles, celles d'une matrice symétrique définie positive sont strictement positives.