Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2014-2015
Licence SPI - L2 - S4

C. Basdevant

# Formulaire de probabilités

## Permutations - Arrangements - Combinaisons

$$P_n = n!, \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

## Sommes d'entiers ou de réels

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

## Hypothèse d'équiprobabilité

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$$

## Probabilité de l'union

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## Probabilité conditionnelle

$$P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

## Formule des probabilités totales

$$P(A) = \sum_{i \in I} P_{B_i}(A)\,P(B_i), \quad \text{pour } (B_i) \text{ système complet d'évènements}$$

## Formule de Bayes

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)\,P(B)}{P_B(A)\,P(B) + P_{B^c}(A)\,P(B^c)}$$

## Indépendance - Incompatibilité

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B), \text{ si } A \text{ et } B \text{ indépendants} \\ P(A \cap B) &= 0, \text{ si } A \text{ et } B \text{ incompatibles} \end{aligned}$$

**Espérance, variance, écart-type** d'une variable aléatoire discrète

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) \\
\mathrm{Var}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} (x-\mathrm{E}(X))^2\, P(X=x) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \\
\sigma(X) &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \\
\mathrm{E}(f(X)) &= \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)
\end{aligned}$$

**Fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad F(i) = P(X \leq i) = \sum_{k=-\infty}^{k=i} P(X=k)$$

**Lois marginales** d'un couple de variables aléatoires discrètes

$$\begin{aligned}
P(X=x) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} P((X,Y)=(x,y)), \quad x \in X(\Omega) \\
P(Y=y) &= \sum_{x\in X(\Omega)} P((X,Y)=(x,y)), \quad y \in Y(\Omega)
\end{aligned}$$

**Loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X=x\}$**

$$P_{\{X=x\}}(Y=y) = P(Y=y \,|\, X=x) = \frac{P\big((Y=y)\cap(X=x)\big)}{P(X=x)} = \frac{P\big((X,Y)=(x,y)\big)}{P(X=x)}$$

**Espérance de $f(X,Y)$**

$$\mathrm{E}(f(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} f(x,y)P\big((X,Y)=(x,y)\big)$$

**Covariance de $X$ et $Y$**

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))(Y-E(Y))\right) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

**Corrélation de $X$ et $Y$**

$$r(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

**Variables indépendantes**

$$\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) \quad P\big((X,Y)=(x,y)\big) = P(X=x)\,P(Y=y)$$

**Somme de variables aléatoires**

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X+Y) &= \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) \\
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

**Lois de probabilités usuelles** pour des variables aléatoires discrètes

Loi uniforme $\mathcal{U}(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$

| Loi | Espérance | Variance |
|---|---|---|
| $P(X=x)=\frac{1}{n}$, $1 \leq x \leq n$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ |

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in [0,1]$

| Loi | Espérance | Variance |
|---|---|---|
| $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$ | $p$ | $p(1-p)$ |

Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$

| Loi | Espérance | Variance |
|---|---|---|
| $P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, $0 \leq x \leq n$ | $np$ | $np(1-p)$ |

La loi binomiale est la probabilité de $x$ succès lorsqu'on fait $n$ expériences ayant chacune une probabilité $p$ de réussir.

Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in ]0,1[$

| Loi | Espérance | Variance | $P(X>N)$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=x)=(1-p)^{x-1}p$, $x \in \mathbb{N}^*$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ | $(1-p)^N$ |

La loi géométrique est la probabilité d'avoir à faire $x$ expériences avant le premier succès d'une épreuve ayant une probabilité $p$ de réussir.

Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n,p,N)$, $p \in ]0,1[$, $n$ et $N \in \mathbb{N}^*$, tels que $n \leq N$ et $pN \in \mathbb{N}^*$

| Loi | Espérance | Variance |
|---|---|---|
| $P(X=x)=\dfrac{\binom{pN}{x}\binom{(1-p)N}{n-x}}{\binom{N}{n}}$, $0 \leq x \leq n$ | $np$ | $np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$ |

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

| Loi | Espérance | Variance |
|---|---|---|
| $P(X=x)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$, $x \in \mathbb{N}$ | $\lambda$ | $\lambda$ |

La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est l'approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \dfrac{\lambda}{n})$ pour $n$ grand, elle modélise l'apparition d'un évènement rare dans une grande population.