Institut Galilée
L2 SPI ATS
Mathématiques
2010-2011

Epreuve de Mathématiques du 15 mars 2011

Durée : 3 heures.

Les exercices sont indépendants.
Les téléphones portables et les documents ne sont pas autorisés.
Les seules calculatrices autorisées sont celles de l'Institut Galilée

Exercice 1 — Soit A la matrice 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une matrices P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Expliciter P^{-1}.

2) En déduire A^{50} et A^{51}.

3) On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 3u_n - 2v_n \\ v_{n+1} & = & 4u_n - 3v_n \end{array} \right.$$

vérifiant les conditions initiales :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = -1$$

Calculer (u_n) et (v_n) selon la parité de n.

Exercice 2 — On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 3 \\ -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A. Ce polynôme est-il scindé sur $\mathbb{R}$?

2) Quelles sont les valeurs propres de A ?

3) Déterminer des bases des sous-espaces propres de A.

4) La matrice A est-elle semblable à une matrice diagonale ?

TSVP

Exercice 3 — On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

1) Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs $(2,0,1)$, $(3,0,4)$ et $(0,2,0)$.

2) Calculer les coordonnées du vecteur $(1,2,1)$ dans la base ainsi obtenue.

3) Écrire la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base.

4) Quelle est l'inverse de cette matrice ?

Exercice 4 — On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A. Est-il scindé dans $\mathbb{R}$? Quel est le déterminant de A ?

2) Montrer que A est une matrice orthogonale.

3) Montrer que A est la matrice d'une rotation dont on déterminera l'axe et la valeur absolue de l'angle.