

Epreuve de Mathématiques du 24 mai 2011

Durée : 3 heures.

Les exercices sont indépendants.

Les téléphones portables et les documents ne sont pas autorisés.

Les seules calculatrices autorisées sont celles de l'Institut Galilée

Exercice 1 — Un questionnaire à choix multiple comporte 5 questions indépendantes et 3 choix par question dont une seule réponse juste. Un candidat répond au hasard. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de bonnes réponses.

1) (Preliminaire) Montrer que

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$$

2) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins quatre bonnes réponses ?

3) Quelle est la loi de X ?

4) Quelle est l'espérance de X ?

5) Chaque bonne réponse vaut 1 point et chaque mauvaise réponse vaut $-1/2$ point. Quelle note le candidat peut-il espérer ?

Exercice 2 — Soient A_1 et A_2 deux ensembles de boules blanches et noires. A_1 contient 70% de boules blanches et A_2 en contient 80%. A_1 contient trois fois plus de boules que A_2 .

On place toutes les boules dans une même urne. On tire une boule au hasard. On constate qu'elle est blanche.

Quelle est la probabilité que cette boule provienne de A_1 ?

Exercice 3 — On considère les applications $E \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur l'espace vectoriel E des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 25 :

$$\begin{aligned}q_1(P) &= P(0)P(1) \\q_2(P) &= P(0)P(1)P(2) \\q_3(P) &= P(0)P(1) + P(0)\end{aligned}$$

Lesquelles sont des formes quadratiques ? Justifier brièvement les réponses.

Exercice 4 — On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par son expression analytique relativement à la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 :

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_3x_1$$

- 1) Déterminer la matrice M de q dans la base canonique.
- 2) Déterminer la forme bilinéaire symétrique polaire de q .
- 3) Appliquer l'algorithme de décomposition de Gauss à la forme quadratique q .
- 4) En déduire une base $\mathcal{E}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, orthogonale pour q et donner les coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3) de x dans la nouvelle base \mathcal{E}' .
- 5) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la nouvelle base \mathcal{E}' .
- 6) Que vaut tPMP ?
- 7) Quelle est la signature de q ?
- 8) Quel est le cône isotrope de q ?