METHODE DES VOLUMES FINIS

Ecole d'été: Modélisation en IFS - La Rochelle, 4-8/7/11

F. Benkhaldoun - LAGA Université Paris 13

5 Juillet 2011

VOLUMES FINIS POUR SYSTEMES HYPERBOLIQUES

Premier schéma aux volumes finis : le schéma de Godunov

Problème de Riemann et solution pour le problème scalaire

Définition

On appelle problème de Riemann, le problème avec condition initiale discontinue :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} & = & 0 \\ & & \\ u_0(x) & = & \left| \begin{array}{lll} u_l & \text{si} & x < 0 \\ u_r & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1)$$

Lemme

La solution du problème de Riemann est autosimilaire, i.e. il existe une fonction régulière g, telle que $u(x,t) = g(\dfrac{x}{t})$.

preuve :

Soit le changement de variable : $X = \alpha x$, et $\tau = \alpha t$, $\alpha > 0$
On a alors $u(x,t) = u\left(x(X,\tau), t(X,\tau)\right) = U(X,\tau)$, et
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial U}{\partial \tau}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha \dfrac{\partial U}{\partial X}$.
En outre là où u est C^1 : $0 = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} =$
$\alpha \left(\dfrac{\partial U}{\partial \tau} + f'(U)\dfrac{\partial U}{\partial X} \right) \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial \tau} + \dfrac{\partial f(U)}{\partial X} = 0.$
De plus : $U(X,0) = u(\dfrac{X}{\alpha}, 0) = u_0(\dfrac{X}{\alpha}) = u_0(X)$
Donc U est solution du problème (1), ce qui implique
$U(X,\tau) = u(X,\tau) = u(\alpha x, \alpha t)$.
Mais on a aussi $U(X,\tau) = u(x,t)$, d'où $u(\alpha x, \alpha t) = u(x,t)$, et
donc $u(x,t) = g(\dfrac{x}{\tau})$

Lemme

Si f est strictement convexe, alors $g(z) = [f']^{-1}(z) = a^{-1}(z)$, avec $g'(z) \neq 0, \forall z \in [z_1, z]$

preuve :

La première équation de (1) implique que

$$\frac{\partial}{\partial t} g(\frac{x}{t}) + f'\left(g(\frac{x}{t})\right) \frac{\partial}{\partial x} g(\frac{x}{t}) = 0,$$

$$-\frac{x}{t^2} g'(\frac{x}{t}) + f'\left(g(\frac{x}{t})\right) (\frac{1}{t}) g'(\frac{x}{t}) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{t} + f'\left(g(\frac{x}{t})\right) = 0 \Rightarrow \forall z \; f'(g(z)) = z$$

$$\Rightarrow g(z) = (f')^{-1}(z)$$

Proposition

La solution du problème de Riemann s'écrit : $u(x,t) = g(\frac{x}{t})$, *avec* $u(x,t) = u_l$ *pour* $\frac{x}{t} < z_1$, *et* $u(x,t) = u_r$ *pour* $\frac{x}{t} > z_2$.

Remarque

en $x = 0$, *la solution ne dépend pas du temps :* $u(o,t) = g(0) = R(u_l, u_r)$.

Application : Equation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0, \quad (2)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x < 0 \\ u_d & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

* Si $u_g > u_d$, alors $u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x < \frac{1}{2}(u_d + u_g) \\ u_d & \text{si} \quad x > \frac{1}{2}(u_d + u_g) \end{cases}$ i.e.

Solution avec choc entropiqe $s = \dfrac{[u^2/2]}{[u]} = \dfrac{1}{2}(u_d + u_g)$

* Si $u_g < u_d$ alors le choc $\Gamma(u_g, u_d)$ n'est pas admissible car non entropique.

Par les caractéristiques : $u(x,t) = u_0(x_0(x,t))$, où $x = x_0 + tu_0(x_0)$

Cas 1 : $x_0 < 0$, on a alors $u_0(x_0) = u_g$,

$x_0 = x - tu_g < 0 \Rightarrow \dfrac{x}{t} < u_g$, et $u(x,t) = u_g$

Cas 2 : $x_0 > 0$, on a alors $u_0(x_0) = u_d$,

$x_0 = x - tu_d > 0 \Rightarrow \dfrac{x}{t} > u_d$, et $u(x,t) = u_d$

Il reste à déterminer la solution dans la région : $u_g < \dfrac{x}{t} < u_d$ du plan (x,t).
On cherche une solution qui soit C^1dans cette région.
Alors $u(x,t) = g(\dfrac{x}{t})$, ici
$f'(z) = a(z) = z \Rightarrow g(z) = (f')^{-1}(z) = z$, donc $u(x,t) = \dfrac{x}{t}$.,
avec $z_1 = f'(u_g)$, et $z_2 = f'(u_d)$

METHODE NUMÉRIQUE DE GODUNOV

Considérons la discrétisation de $\mathbb{R}$: $x_j = jh$, $j \in \mathbb{Z}$, et de $[0, T[$: $t_n = n\tau$.
La solution approchée de u au point (x_j, t_n), sera notée $u_j^n = u^n(x_j)$
On introduit la fonction $u_\tau(x,t) = u^n(x)$ si $t \in T_n = [t_n, t_{n+1}[$, où $u^n(x) = u_j^n$ si $x \in I_j =]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$.
Rappelons que pour u_τ solution au sens des distributions de notre problème, nous avons la propriété *ii*) :

$$\forall R \subset \mathbb{R} \times [0, T] : \quad \int_{\partial R} [u_\tau . n_t + f(u_\tau).n_x] \, d\sigma = 0$$

Afin de déterminer la solution approchée u^{n+1} connaissant u^n, on utilise pour le domaine d'intégration :
$R_j^n = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[.\times[t_n, t_{n+1}[$, on aura alors

$$\int_{\partial R_j^n} [u_\tau.n_t + f(u_\tau).n_x]\, d\sigma = 0,$$

$$\Rightarrow \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_\tau(x, t_n)(-1)dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u(x_{j+}\frac{1}{2}, t)dt +$$

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_\tau(x, t_{n+1})dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)(-1)dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_\tau(x, t_{n+1})dx = hu_j^n\text{-}$$

$$\tau\left[f\left(R(u_j^n, u_{j+1}^n)\right) - f\left(R(u_{j-1}^n, u_j^n)\right)\right]$$

On utilise l'approximation :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_\tau(x, t_{n+1}) dx =$$

$$u_j^n - \frac{\tau}{h} \left[f\left(R(u_j^n, u_{j+1}^n) \right) - f\left(R(u_{j-1}^n, u_j^n) \right) \right] =$$

$$u_j^n - r \left[g^G(u_j^n, u_{j+1}^n) - g^G(u_{j-1}^n, u_j^n) \right]$$

g^G est appelé flux numérique de Godunov.

La condition de validité de la solution des problèmes de Riemann locaux est donnée par la condition de stabilité :

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \left| r.f'(u) \right| < 1$$

Généralisation

Schéma aux volumes finis :

On considère le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

où f est la fonction de flux physique.

Définition

On appelle schéma aux volumes finis, le schéma

$$(S_\tau) : u_j^{n+1} = H_\tau \left(u_{j-q}^n, ..., u_{j+q}^n \right) \tag{4}$$

Exemples à 3 points ($q = 1$) :

1. Le schéma de Godunov
2. Le schéma décentré linéaire :

$$
\begin{aligned}
f(u) &= a.u && (5)\\
u_j^{n+1} &= u_j^n - ra\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) && (6)\\
H_\tau\left(v_{j-1}, v_j, v_{j+1}\right) &= rav_{j-1} + (1-ra)v_j + 0v_{j+1} && (7)
\end{aligned}
$$

Propriétés des schémas aux volumes finis

Forme conservative

Définition

Le schéma (S_τ) sera dit conservatif si :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - r\left(g(u_{j-q+1}, ..., u_{j+q}) - g(u_{j-q}, ..., u_{j+q-1})\right) \quad (8)$$

où g est la fonction de flux numérique.

Exemple :

Le schéma décentré linéaire $(q = 1)$:

$$(9)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - ra\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) \quad (10)$$

$$g\left(u_j^n, u_{j+1}^n\right) = a.u_j^n \quad (11)$$

Remarque

Le schéma de Lax-Friedrich est-il conservatif ?

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) - r\left(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)\right)$$

Oui, avec

$$g\left(u_j^n, u_{j+1}^n\right) = \frac{1}{2}\left(f(u_{j+1}^n) + f(u_j^n)\right) - \frac{1}{2r}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right)$$

Consistance

Definition

Un schéma numérique aux volumes finis conservatif, est consistant si $g(u_{j-q+1}, ..., u_{j+q})$ tend vers $f(u)$ quand u_{j+i} tend vers u, avec $-(q-1) \leq i \leq q$.

Remarque

Le schéma décentré linéaire : $g\left(u_j, u_{j+1}\right) = a.u_j \longrightarrow a.u = f(u)$ *quand* $u + i \longrightarrow u$, $0 \leq i \leq 1$.

Definition

Le flux g est dit continue Lipschitzien si

$$|(g(v_{j-q+1},...,v_{j+q}) - f(v)| < K \max_{-(q-1)\leq i\leq q} |v_{j+i} - v)|$$

Remarque

Le schéma décentré linéaire :

$$|g(u_j, u_{j+1}) - a.u| = a|u_j - u| \leq |a| \max_{0\leq i\leq 1} |u_{j+i} - u|.$$

Théorème de Lax-Wendroff

Théorème

On pose $X = \mathbb{R} \times [0, T[$
Supposons que S_τ *soit conservatif à flux continu Lipschitzien et* $u^0 = \frac{1}{h} \int\limits_{I_j} u_0(x)dx$, *si :*
i) $\|u_\tau\|_{L^\infty(X)} \leq C$
ii) $u_\tau \longrightarrow u$, *quand* $\tau \longrightarrow 0$, *presque partout (pp) dans* $L^1(X)$
alors u *est solution faible de* (PS).

Lemme

L'espace $BV(X) =$
$\left\{ v \in L^1(X) \textit{ tel que } VT(v) < R, \textit{ et support } (v(.,t)) \subset [-A, A] \subset \mathbb{R} \right\}$,
est compact dans $L^1(X)$.

Definition

Le schéma S_τ est dit TV-stable si $\exists\ \tau_0 > 0, /\ \forall\ \tau < \tau_0,\ u_\tau \in BV(X)$.

Proposition

Si $S_{\mathcal{T}}$ est TV-stable, alors il est convergent. i.e. $u_{\mathcal{T}} \longrightarrow u$ p.p dans $L^1(X)$.

Ecriture de la variation totale

$$VT(v) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \sup \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |v(x+\epsilon, t) - v(x,t)| \, dxdt$$

$$+ \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \sup \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |v(x, t+\epsilon) - v(x,t)| \, dxdt$$

$$VT(u_\tau) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \sup \frac{1}{\epsilon} \sum_{n=0}^{T/\tau} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{T_n} \int_{I_j} |u_\tau(x+\epsilon, t) - u_\tau(x,t)| \, dxdt$$

$$+ \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \sup \frac{1}{\epsilon} \sum_{n=0}^{T/\tau} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{T_n} \int_{I_j} |u_\tau(x, t+\epsilon) - u_\tau(x,t)| \, dxdt$$

Remarque

$$\|v\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x)|\, dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{I_j} |v(x)|\, dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h\,|v_j|$$

$$VT(u_\tau) = \sum_{n=0}^{T/\tau} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\tau \left|u_{j+1}^n - u_j^n\right| + h \left|u_j^{n+1} - u_j^n\right|\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{T/\tau} \left(\tau VT_{\mathbb{R}}(u^n) + \left\|u^{n+1} - u^n\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\right)$$

Proposition

Un schéma conservatif à flux continu Lipschitzien, vérifiant $\exists\, R > 0, \exists\, \tau_0 > 0 \;/\; VT_{\mathbb{R}}(u^n) \leq R \;\forall\, \tau, n \;/\; \tau < \tau_0$, *et* $\tau n \leq T$ *est un schéma TV-stable.*

<u>exercice :</u> Montrer que le schéma décentré linéaire converge vers une solution faible du problème.

Solution de l'exercice

On a $f(u) = au$

(S_τ) : $u_j^{n+1} = u_j^n - \upsilon\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right)$, où $\upsilon = ra$

(S_τ) est conservatif : $q = 1$, $g_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_j^n, u_{j+1}^n) = au_j^n$

(S_τ) est à flux continu Lipschitzien :

$$\left|g_{j+\frac{1}{2}}^n - f(u)\right| = \left|au_j^n - au\right| = |a|\left|u_j^n - u\right| \leq |a| \max_{0\leq i\leq 1}\left|u_{j+i}^n - u\right|$$

Stabilité BV : $VT_{\mathbb{R}}(u^n) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left| u_{j+1}^n - u_j^n \right|$

On a
$$\left| u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} \right| = \left| u_{j+1}^n - u_j^n - \upsilon \left(u_{j+1}^n - u_j^n - \left(u_j^n - u_{j-1}^n \right) \right) \right| \leq$$
$$|1-\upsilon| \left| u_{j+1}^n - u_j^n \right| + |\upsilon| \left| u_j^n - u_{j-1}^n \right|$$
d'où $VT_{\mathbb{R}}(u^{n+1}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left| u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} \right| \leq \left(|1-\upsilon| + |\upsilon| \right) VT_{\mathbb{R}}(u^n)$

si $|1-\upsilon| + |\upsilon| < 1$ alors on a $VT_{\mathbb{R}}$ stabilité.

Condition suffisante de $VT_{\mathbb{R}}$ stabilité : $|v| = |a|\, r = ar \leq 1$.
En effet, on a alors $|1 - v| + |v| = 1 - v + v = 1$, et
$VT_{\mathbb{R}}(u^{n+1}) \leq VT_{\mathbb{R}}(u^n) \leq ... \leq VT_{\mathbb{R}}(u^0)$.
Conclusion : *si* $VT(u_0)$ est bornée, alors $VT(u^0)$ est bornée, on a donc $VT_{\mathbb{R}}$ stabilité, et donc VT stabilité.

L^∞ stabilité on a $\left|u_j^{n+1}\right| \leq |1-v| \left|u_j^n\right| + |v| \left|u_{j-1}^n\right| \leq$

$|1-v| \, \|u^n\|_{L^\infty(X)} + |v| \, \|u^n\|_{L^\infty(X)} = (|1-v| + |v|) \, \|u^n\|_{L^\infty(X)}$
sous la condition (CFL) $|v| \leq 1$, on a de nouveau
$\left\|u^{n+1}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left\|u^0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \in \mathbb{R}$.
Conclusion : sous la condition (CFL), le schéma décentré linéaire rempli les conditions du théorème de Lax-Wendroff.

Definition

Un schéma aux volumes finis est dit *TVD* (à Variation Totale Diminuante), s'il vérifie $VT(u^{n+1}) \leq VT(u^n)$.

Proposition

Un schéma TVD est un schéma BV-stable.

Definition

Soit le schéma (S_τ) et les relations : $w_j^{n+1} = H_\tau\left(w_{j-q}^n, \dots, w_{j+q}^n\right)$,
et $u_j^{n+1} = H_\tau\left(u_{j-q}^n, \dots, u_{j+q}^n\right)$, alors S_τ est L_1-contractant si
$\left\|w^{n+1} - u^{n+1}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|w^n - u^n\|_{L^1(\mathbb{R})}$

Proposition

Un schéma aux volumes finis , conservatif, consistant, L_1-contractant est un schéma TVD.

Soit $w_j^n = u_{j-1}^n$, on a

$$hVT(u^{n+1}) = h\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left|u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}\right| = \left\|u^{n+1} - w^{n+1}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq$$

$$\|u^n - w^n\|_{L^1(\mathbb{R})} = h\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left|u_j^n - u_{j-1}^n\right| = hVT(u^n)$$

Definition

Un schéma (S_τ), conservatif, consistant est dit monotone, s'il préserve l'ordre. i.e. : $w_j^n \leq u_j^n \; \forall j \in \mathbb{Z} \Longrightarrow w_j^{n+1} \leq u_j^{n+1} \; \forall j \in \mathbb{Z}$

Remarque

(S_τ) est monotone $\Longrightarrow$ (H_τ) est monotone. Si $w_\tau(x,t) \leq u_\tau(x,t) \; \forall x \in \mathbb{R}$, alors $H_\tau[w_\tau(.,t)](x) \leq H_\tau[u_\tau(.,t)](x) \; \forall x \in \mathbb{R}$

Proposition

Un schéma (S_τ), conservatif, consistant, monotone est un schéma L_1-contractant.

Remarque

$$S_\tau \text{ est monotone si } \forall j \in [-q, ..., q] \ \frac{\partial}{\partial v_k} H_\tau(v_{-q}, ..., v_q) \geq 0$$

Exemple

Schéma décentré à 3 points ($q = 1$)*, pour une équation scalaire linéaire :* $u_j^{n+1} = u_j^n - ra(u_j^n - u_{j-1}^n)$

On a ici $H_\tau(v_{-1}, v_0, v_1) = rav_{-1} + (1 - ra)v_j + 0v_1$

d'où $\dfrac{\partial H_\tau}{\partial v_{-1}} = ra$, $\dfrac{\partial H_\tau}{\partial v_0} = 1 - ra$, $\dfrac{\partial H_\tau}{\partial v_1} = 0$ *Le schéma est donc monotone sous la condition* $0 \leq ra \leq 1$.

Exemple

Schéma de Lax-Friedrich à 3 points ($q = 1$), pour une équation scalaire non linéaire :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{r}{2}\left(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)\right)$$

On a ici $H_\tau(v_{-1}, v_0, v_1) = \frac{1}{2}v_{-1} + \frac{r}{2}f(v_{-1}) + \frac{1}{2}v_1 + \frac{r}{2}f(v_1)$

d'où $\dfrac{\partial H_\tau}{\partial v_{-1}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{r}{2}f'(v_{-1}),\ \ \dfrac{\partial H_\tau}{\partial v_0} = 0,\ \ \dfrac{\partial H_\tau}{\partial v_1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{r}{2}f'(v_1)$

Le schéma est donc monotone sous la condition
$r \mid f'(w) \mid \leq 1\ \forall w \in \mathbb{R}.$

Definition

Le schéma (S_τ) est dit consistant avec la condition d'entropie :

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u) + \frac{\partial}{\partial x}F(u) \leq 0$$

s'il existe une fonction G continue, $G : \mathbb{R}^{2q} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- i) $G(v, ..., v) = F(v)$
- ii)

$$\frac{U(u_j^{n+1}) - U(u_j^n)}{\tau} + \frac{1}{h}[G(u_{j-q+1}^n, ..., u_{j+q}^n) - G(u_{j-q}^n, ..., u_{j+q-1}^n)] \leq 0$$

Autrement dit, s'il respecte une inégalité d'entropie discrète.

Proposition

Un schéma conservatif consistant, monotone, est consistant avec toute condition d'entropie.

Comme nous l'avons noté précédemment, il suffit en fait de montrer le résultat suivant :

Proposition

Un schéma conservatif consistant, monotone, est consistant avec la condition d'entropie $U(u) = \mid u - k \mid$, *et*
$F(u) = sgn(u-k)(f(u) - f(k))$ *pour* $k \in \mathbb{R}$.

Proposition

Un schéma conservatif, à flux continue lipschitzien, convergeant, et consistant avec toute condition d'entropie, converge vers l'unique solution entropique du problème.

Forme incrémentale d'un schéma volumes finis

Définition

Un schéma aux volumes finis admet une forme incrémentale s'il peut s'écrire :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n - D_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n \tag{12}$$

avec :

$$\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n = u_j^{n+1} - u_j^n$$

Proposition

Sous les conditions : $\forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$

$$C^n_{j+\frac{1}{2}} \geq 0, \quad D^n_{j+\frac{1}{2}} \geq 0 \tag{13}$$

$$C^n_{j+\frac{1}{2}} + D^n_{j+\frac{1}{2}} \leq 1 \tag{14}$$

le schéma aux volumes finis à forme incrémentale est TVD.

Proposition

Sous les conditions : $\forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$

$$C^n_{j+\frac{1}{2}} \geq 0, \quad D^n_{j-\frac{1}{2}} \geq 0 \tag{15}$$

$$C^n_{j+\frac{1}{2}} + D^n_{j-\frac{1}{2}} \leq 1 \tag{16}$$

le schéma aux volumes finis à forme incrémentale est L_∞ *stable.*

Forme diffusive d'un schéma volumes finis

Définition

Un schéma aux volumes finis admet une forme diffusive s'il peut s'écrire :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{r}{2}\left(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)\right) + \frac{1}{2}\left(Q_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n - Q_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n\right)$$

avec :

$$Q_{j+\frac{1}{2}}^n = Q(u_{j-q+1}^n, \ldots, u_{j+q}^n)$$

Définition

Un schéma aux volumes finis est dit E-schéma si $\forall u \in (u_j, u_{j+1})$:

$$signe(u_{j+1} - u_j)(g_{j+\frac{1}{2}} - f(u)) \leq 0$$

Proposition

Sous la condition : $\forall u \in \mathbb{R}, r \mid f'(u) \mid \leq \frac{1}{2}$
Un E-schéma vérifiant :

$$Q^G_{j+\frac{1}{2}} \leq Q_{j+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$$

converge vers l'unique solution faible entropique du problème.

J. J. Stoker : *Water waves* , Interscience Publishers, New york, **(1957)**,