# METHODE DES VOLUMES FINIS

F. Benkhaldoun

LAGA Université Paris 13

13 avril 2010

# VOLUMES FINIS POUR SYSTEMES HYPERBOLIQUES

## Systèmes physiques considérés

On s'intéresse à des problèmes d'écoulements de fluides, représentés généralement par des systèmes d'EDP du type :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} + \frac{\partial H(W)}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

Exemples :

Equations d'Euler en une dimension d'espace

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial \left(\rho u^2 + P\right)}{\partial x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{\partial \left[u \left(E + P\right)\right]}{\partial x} = 0
\end{cases}
\tag{2}
$$

avec la loi d'état pour les gaz parfaits : $p = (\gamma - 1)\left(E - \dfrac{1}{2}\rho u^2\right)$,

où $\rho$ est la densité du fluide, $u$ la vitesse, $E$ l'Energie, et $p$ : la pression.

Ecoulement d'eau peu profonde - Modèle De Saint-Venant

On considère un écoulement d'eau où la profondeur est négligeable devant l'étendue (Modèle Shallow Water [1]). Si le fond du canal est plat (pente nulle), et les frottements négligeables, le problème est régi par le système simplifié :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial (hu)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial (hu)}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(hu^2 + \dfrac{1}{2}gh^2\right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$h$ étant la hauteur de l'eau, $u$ : la vitesse, et $g$ la constante de gravité.

## Présentation de la méthode pour problèmes scalaires monodimensionnels

Introduction

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}\times]0, T[ \\ \\ u = u(x,t) \in \mathbb{R} \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

Dans la suite, on notera $X = \mathbb{R} \times [0, T[$.

Exemple, équation de Burger : $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0$

## Solution au sens des distributions et relations de saut

Résolution dans le cas où $u$ est $C^1$

Si $u \in C^1(X)$, on a : (4) $\Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\dfrac{\partial(u)}{\partial x} = 0$ $u$ est alors constante sur la courbe caratéristique dans le plan $(x, t)$ donnée par

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f'\left[u\left(x(t), t\right)\right] \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \tag{5}$$

On en déduit la solution $u$ :

$$u\left(x(t), t\right) = u\left(x(0), 0\right) = u\left(x_0, 0\right) = u_0(x_0)$$

## Solution au sens des distributions et relations de saut

Résolution dans le cas où $u$ est $C^1$

Si $u \in C^1(X)$, on a : (4) $\Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\dfrac{\partial (u)}{\partial x} = 0$ $u$ est alors constante sur la courbe caratéristique dans le plan $(x, t)$ donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx(t)}{dt} = f'\left[u\left(x(t), t\right)\right] \\ \\ x(t=0) = x_0 \end{array} \right. \tag{5}$$

On en déduit la solution $u$ :

$$u\left(x(t), t\right) = u\left(x(0), 0\right) = u\left(x_0, 0\right) = u_0(x_0)$$

## Solution au sens des distributions et relations de saut

Résolution dans le cas où $u$ est $C^1$

Si $u \in C^1(X)$, on a : (4) $\Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\dfrac{\partial(u)}{\partial x} = 0$ $u$ est alors constante sur la courbe caratéristique dans le plan $(x, t)$ donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx(t)}{dt} = f'\left[u\left(x(t), t\right)\right] \\ \\ x(t=0) = x_0 \end{array} \right. \tag{5}$$

On en déduit la solution $u$ :

$$u\left(x(t), t\right) = u\left(x(0), 0\right) = u\left(x_0, 0\right) = u_0(x_0)$$

En notant $f'(u) = a(u)$, le système caractéristique considéré est alors :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\left(u_0(x_0)\right) \\ \\ u(x,t) = u_0(x_0) \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x_0 = x - ta\left(u_0(x_0)\right) \\ \\ u(x,t) = u_0(x_0) \end{cases} \tag{6}$$

Applications :

En notant $f'(u) = a(u)$, le système caractéristique considéré est alors :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\left(u_0(x_0)\right) \\ \\ u(x,t) = u_0(x_0) \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x_0 = x - ta\left(u_0(x_0)\right) \\ \\ u(x,t) = u_0(x_0) \end{cases} \tag{6}$$

Applications :

1. Cas linéaire

$$f(u) = cu : \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Longrightarrow a(u) = c$$

caractéristique : $x = x_0 + tc \Leftrightarrow x_0 = x - ct$

Solution : $u(x,t) = u_0(x - ct)$

## 2. Equations de Burger

On considère l'équation non linéaire suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0,$$

Ici on a $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$, donc $a(u) = f'(u) = u$

La caractéristique est donnée par : $x = x_0 + tu_0(x_0)$

Soient les différentes conditions initiales :

cas 1

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

cas $x_0 < 0$, $x = x_0$, $u_1(x,t) = u_0(x)$

cas $x_0 \geq 0$, $x = x_0 + tx_0$, $u_1(x,t) = u_0(x_0) = u_0\left(\dfrac{x}{1+t}\right) = \dfrac{x}{1+t}$

cas 2

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

cas $x_0 < 0$, $x = x_0 + t$, $u_2(x,t) = u_0(x-t) = u_0(x_0) = 1$

cas $x_0 \geq 0$, $x = x_0$, $u_2(x,t) = u_0(x) = 0$

Solutions discontinues et relations de saut :

## Theorem

*Les 3 énoncés suivants sont équivalents :*
*i) u est une solution au sens des distributions, ou solution faible de (4) , i.e*

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f(u)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdt+\int_{\mathbb{R}}u_0(x)\varphi(x,0)dx=0,$$

$\forall\varphi\in D\left(\mathbb{R}\times[0,+\infty[\right)$
*ii)* $\forall R=[x_1,x_2]\times[t_1,t_2]\subset\Omega=\mathbb{R}\times[0,T]$,

$$\int_{\partial R}\left[u.n_t+f(u).n_x\right]d\sigma=0$$

**Theorem**

*iii) là où $u$ est $C^1$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$ au sens classique, et sur $\Gamma(u_l, u_r)$ d'équation $\dfrac{dx}{dt} = s$, courbe de discontinuité entre les états $u_l$ et $u_r$ , on a la relation de saut : $[f(u)] = s\,[u]$, où $[u] = u_r - u_l$.*

La relation de saut est appelée relation de Rankime-Hugoniot en dynamique des gaz.

Exemple : Soit l'équation de Burger :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0 \tag{7}$$

et la condition initiale : $u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Première solution faible : On cherche une solution avec le choc $\Gamma(0,1)$, on utilise alors les relations de saut :

$[f(u)] = s\,[u] \Longrightarrow \left[\frac{u_r^2}{2} - \frac{u_l^2}{2}\right] = s\,[u_r - u_l] \Longrightarrow s = \frac{1}{2} \Longrightarrow$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{x}{t} < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{x}{t} \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exemple : Soit l'équation de Burger :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0 \tag{7}$$

et la condition initiale : $u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Première solution faible : On cherche une solution avec le choc $\Gamma(0,1)$, on utilise alors les relations de saut :

$$[f(u)] = s\,[u] \Longrightarrow \left[\frac{u_r^2}{2} - \frac{u_l^2}{2}\right] = s\,[u_r - u_l] \Longrightarrow s = \tfrac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \dfrac{x}{t} < \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \dfrac{x}{t} \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Deuxième solution faible : $u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \dfrac{x}{t} < 0 \\ \dfrac{x}{t} & \text{si} \quad 0 \leq \dfrac{x}{t} < 1 \\ 1 & \text{si} \quad \dfrac{x}{t} \geq 1 \end{cases}$

Il conviendrait donc d'avoir un critère de selection entre ces deux solutions au sens des distributions. Ceci fera l'objet de la section suivante.

Deuxième solution faible : $u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \dfrac{x}{t} < 0 \\ \dfrac{x}{t} & \text{si} \quad 0 \leq \dfrac{x}{t} < 1 \\ 1 & \text{si} \quad \dfrac{x}{t} \geq 1 \end{cases}$

Il conviendrait donc d'avoir un critère de selection entre ces deux solutions au sens des distributions. Ceci fera l'objet de la section suivante.

# Validité physique de la solution : condition d'entropie

## Solution entropique

### Definition

Une fonction convexe $U$, assez régulière, est dite entropie du problème, s'il existe une fonction F appelée flux d'entropie vérifiant : $U'(u)f'(u) = F'(u)$.

### Definition

$u$ solution faible du problème (4) est dite entropique si

$$\forall \varphi \in D\left(\mathbb{R} \times ]0, T]\right) : \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left( U(u)\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(u)\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dxdt \geq 0, \text{ où } U$$

est une entropie du problème, et $F$ le flux d'entropie.

Remarque 1 : On montre qu'une solution entropique vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe (mais non dérivable au sens classique), $U(u) = \mid u - k \mid$, et le flux d'entropie associé $F(u) = sgn(u - k)(f(u) - f(k))$, où $k \in \mathbb{R}$

Remarque 2 : Réciproquement, comme toute fonction convexe appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des fonctions affines, et des fonctions de la forme $x \longrightarrow \mid x - k \mid$, une solution qui vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe $U(u) = \mid u - k \mid$, est une solution entropique.

**Theorem**

*(Kruzkov 1970) Sous certaines hypothèses de régularité de $u_0$, il existe une unique solution entropique du problème* (4).

Remarque 1 : On montre qu'une solution entropique vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe (mais non dérivable au sens classique), $U(u) = \mid u - k \mid$, et le flux d'entropie associé $F(u) = sgn(u-k)(f(u) - f(k))$, où $k \in \mathbb{R}$

Remarque 2 : Réciproquement, comme toute fonction convexe appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des fonctions affines, et des fonctions de la forme $x \longrightarrow \mid x - k \mid$, une solution qui vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe $U(u) = \mid u - k \mid$, est une solution entropique.

**Theorem**

*(Kruzkov 1970) Sous certaines hypothèses de régularité de $u_0$, il existe une unique solution entropique du problème (4).*

Remarque 1 : On montre qu'une solution entropique vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe (mais non dérivable au sens classique), $U(u) = \mid u - k \mid$, et le flux d'entropie associé $F(u) = sgn(u - k)(f(u) - f(k))$, où $k \in \mathbb{R}$

Remarque 2 : Réciproquement, comme toute fonction convexe appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des fonctions affines, et des fonctions de la forme $x \longrightarrow \mid x - k \mid$, une solution qui vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe $U(u) = \mid u - k \mid$, est une solution entropique.

**Theorem**

*(Kruzkov 1970) Sous certaines hypothèses de régularité de $u_0$, il existe une unique solution entropique du problème* (4).

Notion d'entropie

Lemme : Il existe une quantité $U$ qui est convectée partout où $u$ est $C^1$ i.e. $\dfrac{\partial}{\partial t}U(u) + \dfrac{\partial}{\partial x}F(u) = 0$

preuve : là où $u$ est $C^1$ : $U'(u)\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$, s'il existe $F$ tel que $U'(u)f'(u) = F'(u)$, alors $\dfrac{\partial}{\partial t}U(u) + \dfrac{\partial}{\partial x}F(u) = 0$

Notion d'entropie

Lemme : Il existe une quantité $U$ qui est convectée partout où $u$ est $C^1$ i.e. $\frac{\partial}{\partial t}U(u) + \frac{\partial}{\partial x}F(u) = 0$

preuve : là où $u$ est $C^1$ : $U'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$, s'il existe $F$ tel que $U'(u)f'(u) = F'(u)$, alors $\frac{\partial}{\partial t}U(u) + \frac{\partial}{\partial x}F(u) = 0$

Considérons le problème régularisé du problème (4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} & = & \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) & = & u_0(x) \end{cases} \tag{8}$$

**Proposition**

*Il existe une unique solution régulière $u^\varepsilon$ du problème (8)*

**Proposition**

*La solution du problème (4) est limite au sens des distributions quand $\varepsilon$ tend vers 0 de la solution du problème (8)*

Considérons le problème régularisé du problème (4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{8}$$

**Proposition**

*Il existe une unique solution régulière $u^\varepsilon$ du problème (8)*

**Proposition**

*La solution du problème (4) est limite au sens des distributions quand $\varepsilon$ tend vers 0 de la solution du problème (8)*

Considérons le problème régularisé du problème (4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{8}$$

**Proposition**

*Il existe une unique solution régulière $u^\varepsilon$ du problème (8)*

**Proposition**

*La solution du problème (4) est limite au sens des distributions quand $\varepsilon$ tend vers 0 de la solution du problème (8)*

## Proposition

*Une fonction u, $C^1$ par morceaux, est solution faible entropique de (4) si et seulement si :*
*i) u est solution classique là où u est $C^1$*
*ii) Sur une courbe de choc $\Gamma$, u satisfait $[F(u)] \leq s\,[U(u)]\,,\ \forall$ $(U,F)$ couple d'entropie et de flux d'entropie.*

## Corollaire

*1) Si f est strictement convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $f'(u_r) < s < f'(u_l)$*

## Corollaire

*: 2) Si f est convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $u_r < u_l$*

## Proposition

*Une fonction u, $C^1$ par morceaux, est solution faible entropique de (4) si et seulement si :*
*i) u est solution classique là où u est $C^1$*
*ii) Sur une courbe de choc $\Gamma$, u satisfait $[F(u)] \leq s\,[U(u)]$, $\forall$ $(U, F)$ couple d'entropie et de flux d'entropie.*

## Corollaire

*1) Si f est strictement convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $f'(u_r) < s < f'(u_l)$*

## Corollaire

*: 2) Si f est convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $u_r < u_l$*

## Proposition

*Une fonction u, $C^1$ par morceaux, est solution faible entropique de (4) si et seulement si :*
*i) u est solution classique là où u est $C^1$*
*ii) Sur une courbe de choc $\Gamma$, u satisfait $[F(u)] \leq s\,[U(u)]$, $\forall$ $(U, F)$ couple d'entropie et de flux d'entropie.*

## Corollaire

*1) Si f est strictement convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $f'(u_r) < s < f'(u_l)$*

## Corollaire

*: 2) Si f est convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $u_r < u_l$*

## Proposition

*Une fonction u, $C^1$ par morceaux, est solution faible entropique de (4) si et seulement si :*
*i) u est solution classique là où u est $C^1$*
*ii) Sur une courbe de choc $\Gamma$, u satisfait $[F(u)] \leq s\,[U(u)]$, $\forall$ $(U, F)$ couple d'entropie et de flux d'entropie.*

## Corollaire

*1) Si f est strictement convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $f'(u_r) < s < f'(u_l)$*

## Corollaire

*: 2) Si f est convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $u_r < u_l$*

Application : la première solution de l'exemple (7) n'est pas entropique, donc non admissible.

J. J. Stoker : *Water waves* , Interscience Publishers, New york, **(1957)**,