# FORMULES EXPLICITES POUR LE CARACTÈRE DE CHERN EN $K$-THÉORIE ALGÉBRIQUE

*par*

Grégory Ginot

***Résumé.*** — On donne ici une formule explicite pour l'application $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$ induisant le caractère de Chern algébrique universel de Goodwillie-Jones de la $K$-théorie algébrique d'un anneau vers son homologie cyclique négative. En degré 2 on décrit le caractère de Chern de la $K$-théorie de Milnor vers l'homologie négative. On calcule le caractère de Chern des symboles de Steinberg, de Dennis-Stein et de Loday. On donne également une preuve élémentaire de la compatibilité du caractère de Chern avec les produits en $K$-théorie et homologie cyclique.

***Abstract.*** — In this paper we give an explicit formula for the map $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$ inducing Goodwillie-Jones's algebraic Chern character from algebraic $K$-theory to negative cyclic homology of a ring. In degree 2 we compute the map $\mathrm{ch}_2$ from Milnor's group $K_2(A)$ to $HC_2^-(A)$ (with $A$ a ring). We compute formulas for the Chern character of Steinberg, Dennis-Stein and Loday symbols. From the previous results we get a new proof of the compatibility of the Chern character with products.

Au début des années 1980, Connes [**3**] et Tsygan [**28**] ont défini l'homologie cyclique associée à toute algèbre associative $A$ sur un corps $k$ de caractéristique nulle. Peu de temps après, Goodwillie [**10**] et John Jones [**12**] ont introduit des groupes $HC_*^-(A)$ d'homologie cyclique négative et construit une application naturelle $ch : K_*(A) \to HC_*^-(A)$ de la K-théorie algébrique de $A$ vers son homologie cyclique négative. Cette application, appelée *caractère de Chern algébrique*, généralise le caractère de Chern construit par Connes et Karoubi en degré $* = 0, 1$ dans le cadre de la géométrie non commutative *cf.* [**29**].

L'ingrédient principal dans sa construction est une application fonctorielle $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$, de l'homologie d'un groupe $G$ vers l'homologie cyclique négative de l'anneau $\mathbf{Z}[G]$ du groupe. Dans [**10**] la construction de $\Upsilon_*$ se fait à l'aide

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — Primaire 19D55 Secondaire 16E40, 18H10, 19D45, 19C20.
***Mots clefs.*** — Homologie cyclique, $K$-théorie algébrique, caractère de Chern, symboles de Steinberg, symboles de Loday.

de la méthode des modèles acycliques ; dans [**12**] elle est basée sur un calcul de l'homologie cyclique d'un certain complexe mixte attaché à $G$. Aucune de ces méthodes n'est explicite et, sauf en degré $* = 0, 1$ où il est facile de deviner des formules, il n'existe pas de morphisme connu au niveau des complexes induisant l'application $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$ en homologie. En raison de la grande importance du caractère de Chern algébrique et de la place centrale qu'il occupe dans la géométrie non commutative de Connes, il semble extrêmement désirable de disposer d'une formule pour une application au niveau des complexes et pas seulement au niveau des classes d'homologie.

Dans ce travail, nous comblons cette lacune en construisant un morphisme de complexes explicite induisant l'application $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$ en homologie. Lorsqu'on applique cette construction au groupe $G = GL(A)$ des matrices carrées inversibles (de toute taille) à coefficients dans l'anneau $A$, nous obtenons des formules explicites pour le caractère de Chern algébrique $ch_* : K_*(A) \to HC_*^-(A)$. Ceci nous permet par exemple d'obtenir des cycles explicites pour l'image dans l'homologie cyclique négative d'éléments bien connus en K-théorie algébrique, comme les symboles de Steinberg, de Dennis-Stein et de Loday. On obtient aussi une démonstration élémentaire de la commutativité du caractère de Chern algébrique avec les produits en K-théorie algébrique et en homologie cyclique négative (McCarthy [**24**]) . L'intérêt de cette étude élémentaire réside dans le fait qu'elle permet de simplifier le calcul de l'image d'un produit.

Voici le plan de l'article. Le paragraphe 1 est consacré à quelques rappels. Au paragraphe 2 nous donnons des formules explicites pour le caractère de Chern algébrique et l'application $\Upsilon_*$. Le paragraphe 3 est consacré au degré 2. Au paragraphe 4 nous déterminons explicitement le caractère de Chern des symboles de Loday en degré $\geq 2$. On en déduit une nouvelle preuve de la compatibilité du caractère de Chern avec les $\lambda$-opérations en $K$-théorie et homologie cyclique relative dans le cas de l'idéal d'augmentation d'une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée ([**9**]). Nous établissons la compatibilité des produits avec le caractère de Chern algébrique au paragraphe 5.

Dans toute la suite $k$ sera un anneau commutatif. Les $k$-algèbres considérées seront associatives et unitaires. La lettre $u$ désignera une variable de degré $-2$ de telle sorte que, si $C_*$ est un module cyclique, son bicomplexe cyclique négatif s'écrit $\mathrm{ToT}\mathcal{B}C_*^- = \prod_{i\geq 0} C_{*+2i}u^i$. De plus on notera $ch_n^i$ la composante dans la colonne $-i$ du caractère de Chern *i.e.* $ch_n = \sum_{i\geq 0} ch_n^i u^i$. Enfin, on posera $(-1)! = 1$.

## 1. Homologie cyclique, homologie des groupes et $K$-théorie

Un module cyclique $C_*$ est la donnée d'un module simplicial et, pour tout $n \geq 0$, d'une action compatible du groupe cyclique $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ dont on notera $\tau_n$ un générateur (voir [**20**] pour une définition précise). On pose $t_n = (-1)^n\tau_n$ et $N_n = \mathrm{id} + t_n + ... + t_n^n$. Dans la suite l'indice $n$ sera généralement sous-entendu. On notera $d_i : C_n \to C_{n-1}$, $s_i : C_n \to C_{n+1}$ les faces et dégénérescences et $b$ la différentielle $\sum_{i=0}^n(-1)^i d_i$. On utilisera dans la suite trois modules cycliques différents. Le premier est le complexe de Hochschild défini, pour toute algèbre associative $A$, par $C_n(A) =$

$A^{\otimes n+1}$. On utilise la notation $(a_0, ..., a_n)$ pour $a_0 \otimes ... \otimes a_n$ où $a_0, ..., a_n \in A$. Pour $i \geq 1$ on écrira aussi $(a_1, ..., a_n)^i$ pour le tenseur $a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes \ldots \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n \in A^{\otimes ni}$ avec $i$ facteurs $a_1 \otimes ... \otimes a_n$. L'homologie du complexe $(C_*(A), b = \sum(-1)^i d_i)$ est par définition l'homologie de Hochschild de $A$, notée $HH_*(A)$.

La résolution standard d'un groupe $G$ définie par $E_n(G) = k[G^{n+1}]$ est aussi un module cyclique par permutation des facteurs. On notera $[g_0, ..., g_n](g_i \in G)$ les éléments de la base canonique de $E_n(G)$ et $H_*(G)$ l'homologie du complexe standard $C_*(G) = k \otimes_{k[G]} E_*(G)$ où $G$ agit diagonalement.

Il y a un module cyclique qui fait le lien entre les deux précédents (*cf.* [**14**]). Il s'agit du sous-module $NG_n$ de $C_n(k[G]) = k[G]^{n+1}$ engendré par les éléments $(g_0, ..., g_n)$ tels que $g_0 ... g_n = 1$. Nous noterons $HH_*(NG)$ l'homologie du complexe $(NG_*, d)$. L'application linéaire $\varphi : E_*(G) \to NG_*$ donnée, pour tout $n$, par

$$\varphi[g_0, ..., g_n] = (g_n^{-1} g_0, ..., g_{n-1}^{-1} g_n)$$

induit un isomorphisme de modules cycliques $\varphi : C_*(G) \cong C_*(NG)$.

Il sera pratique de donner une étiquette à certains éléments de $G$ pour donner les formules explicites des paragraphes 2.3, 3. Si on munit un élément $g \in G$ d'une étiquette, on le note $\widetilde{g}$. On note $\widetilde{E}_*(G)$ le complexe $E_*(G)$ avec la condition supplémentaire que les éléments de la base canonique de $E_*(G)$ sont éventuellement étiquetés. On note $\widetilde{N} : \widetilde{E}_*(G) \to E_*(G)$ l'application définie, pour $[x_0, ..., x_n] \in \widetilde{E}_n(G)$, par $\widetilde{N}[x_0, ..., x_n] = 0$ si aucun $x_i$ n'est étiqueté; sinon on pose

$$\widetilde{N}[x_0, ..., x_n] = \delta \left( \sum t^k [x_0, ..., x_n] \right)$$

où $k$ est tel que $x_{n-k+1}$ soit étiqueté et $\delta : \widetilde{E}_*(G) \to E_*(G)$ est l'application qui supprime les étiquettes. On étiquette de la même façon les éléments de $NG_*$ (*via* $\varphi$). En d'autres termes, faire agir $\widetilde{N}$ sur une chaîne revient à faire agir sur cette chaîne toutes les permutations cycliques qui placent un élément étiqueté en position 0.

Il est bien connu que pour tout module cyclique $C_*$ l'application $B = (1-t)sN : C_n \to C_{n+1}$, avec $s = \tau s_n$, vérifie $B^2 = bB + Bb = 0$. Dans la suite on s'intéressera au bicomplexe négatif ([**11**], [**20**]) associé, c'est-à-dire au bicomplexe $\mathcal{B}C_*^-$ suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & b\downarrow & & b\downarrow \\
 & & & & \ldots & \xleftarrow{B} & C_2 & \xleftarrow{B} & C_1 \\
 & & & & b\downarrow & & b\downarrow & & b\downarrow \\
 & & \ldots & \xleftarrow{B} & C_2 & \xleftarrow{B} & C_1 & \xleftarrow{B} & C_0 \\
\ldots & & b\downarrow & & b\downarrow & & b\downarrow & & \\
 & & & & & & & & \\
\text{Colonne} & & -3 & & -2 & & -1 & & 0
\end{array}$$

L'homologie de $\mathrm{ToT}\mathcal{B}C_* = \left(\prod_{p+q=n} \mathcal{B}C_{p,q}^-, b+B\right)$, où $\mathcal{B}C_{p,q}^- = C_{q-p}$ si $q \geq p, p \leq 0$ et 0 sinon, est *l'homologie cyclique négative* de $C_*$, notée $HC_*^-(C_*)$.

Rappelons que si $C_*$ est un module simplicial, on appelle *normalisé* de $C_*$ le complexe quotient défini pour tout $n \geq 0$ par

$$\overline{C}_n = C_n/(s_0(C_{n-1}) + ... + s_{n-1}(C_{n-1}))$$

qui est quasi-isomorphe à $C_*$. Remarquons que $\overline{C}_n(A) = A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$ où l'on a noté $\overline{A} = A/k$. En ce qui concerne $\overline{E}_*(G), \overline{C}_*(G)$, ils sont obtenus de $E_*(G), C_*(G)$ en annulant les éléments $[g_0, ..., g_n]$ pour lesquels il existe $0 \leq i \leq n-1$ tel que $g_i = g_{i+1}$.

Pour définir la $K$-théorie algébrique d'un anneau $A$, on utilisera la construction "+" de Quillen; on pourra par exemple consulter [**18**] pour un exposé détaillé. On notera $GL(A) = \varinjlim GL_n(A)$ le groupe linéaire et $E(A)$ celui engendré par les matrices élémentaires. On notera également $\mathcal{M}(A) = \varinjlim \mathcal{M}_n(A)$ les matrices infinies.

## 2. Caractère de Chern explicite

**2.1. Caractère de Chern algébrique.** — Dans cette partie on rappelle la construction du caractère de Chern algébrique construit par Goodwillie [**10**] et Jones [**12**]. On peut également consulter [**14**], [**20**] et [**29**] par exemple.

Soit $A$ une $k$-algèbre . La projection canonique $P : \mathcal{B}C_*^-(A) \to C_*(A)$ sur la colonne 0 est un morphisme de complexes. Le caractère de Chern est un morphisme de groupes $ch_* : K_*(A) \to HC_*^-(A)$ défini de manière à avoir la relation

$$P \circ ch_* = D_*$$

où $D_* : K_*(A) \to HH_*(A)$ est l'application de Dennis [**5**] dont nous par rappelons la définition (*cf.* [**20**] chapitre 8). Le morphisme d'Hurewicz donne un morphisme

$$H : K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+) \to H_n(BGL(A)^+) = H_n(BGL(A)) = H_n(GL(A)).$$

On a un morphisme injectif de modules cycliques $C_*(G) \stackrel{\varphi}{\to} NG_* \hookrightarrow C_*(k[G])$ pour tout groupe $G$ et un morphisme bien défini

$$k[GL(A)]^{\otimes n+1} \longrightarrow \mathcal{M}(A)^{\otimes n+1} \xrightarrow{tr} \overline{C_n}(A)$$

où tr est la *trace généralisée de Dennis*, définie par:

$$\mathrm{tr}(\alpha^0, ..., \alpha^n) = \sum(\alpha^0_{i_0,i_1}, \alpha^1_{i_1,i_2}, ..., \alpha^n_{i_n,i_0}).$$

*L'application de Dennis* est la composée :

$$D_i : K_i(A) \xrightarrow{\psi} H_i(GL(A)) \xrightarrow{\varphi} HH_i(NGL(A)) \longrightarrow HH_i(\mathcal{M}(A)) \xrightarrow{tr} HH_i(A).$$

L'inclusion de la colonne numéro 0 dans $\mathcal{B}C_*^-$ n'est pas un morphisme de complexes. Mais dans le cas du module cyclique $C_*(G)$ associé à un groupe $G$, il y a une injection $H_*(G) \hookrightarrow HC_*^-(G)$ qui est une section de $P_* : HC_*^-(G) \to H_*(G)$. Dans [**10**](Lemme II.3.2) Goodwillie a montré que cette injection était induite par un morphisme de complexes $\Upsilon_* : C_*(G) \to \mathcal{B}C_*^-(G)$ dont la restriction à la colonne 0 est l'identité et, qu'en fait, deux tels morphismes de complexes étaient nécessairement homotopes.

Le *caractère de Chern algébrique* se définit alors (*cf.* [**20**] chapitre 8) comme la composée $\mathrm{ch}_n : K_n(A) \to HC_n^-(A)$ (où $n \geq 1$) suivante :

$$K_n(A) \xrightarrow{H} H_n(GL(A)) \xrightarrow{\Upsilon_n} HC_n^-(A) \xrightarrow{\varphi} HC_n^-(NGL(A)) \longrightarrow HC_n^-(\mathcal{M}(A)) \xrightarrow{\mathrm{tr}} HC_n^-(A).$$

**2.2. Une application de $E_*(G)$ dans $\mathcal{B}E_*^-(G)$.** — Dans ce paragraphe on va expliciter un morphisme de complexe $\Upsilon_* : C_*(G) \to \mathcal{B}C_*^-(G)$ dont la restriction à la colonne 0 est l'identité.

Rappelons que $E_*(G) = k[G^{*+1}]$, $C_*(G) = k \otimes_{k[G]} E_*(G)$ est le complexe d'Eilenberg-MacLane de $G$ et $u$ désigne une variable de degré $-2$ de sorte que

$$\mathrm{ToT}\mathcal{B}E_n^-(G) = \prod_{p\geq 0} E_{n+2p}(G)u^p.$$

Si $\Upsilon_* : E_*(G) \to \mathcal{B}E_*^-(G)$ est une application linéaire graduée de degré 0, on note $\Upsilon_n$ sa restriction à $E_n(G)$ et on écrit $\Upsilon_n$ comme la série formelle $\Upsilon_n = \sum_{i\geq 0} \Upsilon_n^i u^i$ où $\Upsilon_n^i : E_n(G) \to E_{n+2i}(G)$. Une telle application est un morphisme de complexes si et seulement si pour tout $n \geq 0$, $i \geq 0$, on a (en posant $\Upsilon_n^{-1} = \Upsilon_{-1}^i = 0$ pour $n, i \geq 0$)

$$b\Upsilon_n^i + B\Upsilon_n^{i-1} = \Upsilon_{n-1}^i b \qquad (1)_n^i.$$

La formule obtenue pour $\Upsilon_*$ utilise une famille "paramétrée" d'homotopies contractantes pour $b$ (dans $E_*(G)$)que nous définissons d'abord.

***Définition 2.1.*** — *Soit $h$ un élément de $G$. On note $s_{(h)} : E_*(G) \to E_{*+1}(G)$ l'application $k$-linéaire définie par $s_{(h)}[g_0, ..., g_n] = [h, g_0, ..., g_n]$ pour tout $g_0, ..., g_n \in G$.*

***Lemme 2.2.*** — *Pour tous $h, g, g_0, ..., g_n \in G$, on a*

**i) :** $s_{(h)}b + bs_{(h)} = \mathrm{id} = s_{(h)}b' + b's_{(h)}$,

**ii) :** $s_{(gh)}[gg_0, ..., g.g_n] = gs_{(h)}[g_0, ..., g_n]$.

Les opérateurs $s_{(h)}$ ne sont pas $G$-linéaires. Cependant la relation *ii*) du lemme suffira à assurer la linéarité de l'application $\Upsilon_*$.

Dans la suite on va construire des applications $k$-linéaires en utilisant des morphismes $s_{(h)}$ successifs dont on fera varier l'indice $h$ selon les vecteurs de base de $k[G^*]$. Pour cela précisons quelques notations. Soient $f_1, ..., f_m$ des endomorphismes gradués $k$-linéaires de $E_*(G)$ et $f$ un endomorphisme de degré $\ell \in \mathbb{Z}$ de $E_*(G)$. Pour $x_0, ..., x_n \in G$, on définit les éléments $x_k^j \in G$, $k_i \in k$ par

$$f([x_0, ..., x_n]) = \sum_{i=1}^{r} k_i[x_0^i, ..., x_{n+\ell}^i].$$

***Définition 2.3.*** — *On note $(S_f f_1 ... S_f f_m)f$ l'endomorphisme $k$-linéaire de $E_*(G)$ donné, pour tout $[g_0, ..., g_n] \in E_n(G)$, par*

$$(S_f f_1 ... S_f f_m)f([x_0, ..., x_n]) = \sum_{i=1}^{r} k_i \big(s_{(x_0^i)} \circ f_1 \circ ... \circ s_{(x_0^i)} \circ f_m\big)([x_0^i, ..., x_{n+\ell}^i]).$$

En particulier $(S_{\mathrm{id}}f)\mathrm{id}$ est l'application $k$-linéaire $[g_0,...,g_n] \mapsto s_{(g_0)}f([g_0,...,g_n])$ que l'on notera plus simplement $S_{\mathrm{id}}f$. On utilisera aussi la notation $(S_f f_1)^i S_{f_1} f_1$ pour $(S_f f_1 ... S_f f_1)f$ avec $i$ itérations de $S_f f_1$ et $(S_f f_1)^0 f = f$.

Avec les notations de la partie 1, en particulier $[g]^n = [g,...,g]$, on a pour $\Upsilon_0$.

***Lemme 2.4.*** — *Dans $E_*(G)$, pour $g \in G$, $i \geq 0$, on a*

**i) :** $b[g]^{2i+1} = [g]^{2i}$, $\quad B[g]^{2i+1} = 2(2i+1)\,[g]^{2i+2}$,

**ii) :** $b[g]^{2i} = 0$, $\quad B[g]^{2i} = 0$.

**iii) :** *L'application ($G$-linéaire) $\Upsilon_0([g]) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \frac{(2i)!}{i!}[g]^{2i+1}$ vérifie $(1)_0^*$.*

*Démonstration*: On a $b[g]^{2i+1} = \sum_{j=0}^{2i+1}(-1)^j[g]^{2i} = [g]^{2i}$ et

$$B[g]^{2i} = (1-t)\circ s\circ N[g]^{2i} = (2i+1)(1-t)\circ s[g]^{2i+1} = 2(2i+1)[g]^{2i+2}.$$

On montre *ii*) de même. Il résulte de *i*) que, quel que soit $i \geq 0$, on a

$$B\left((-1)^i\frac{(2i)!}{i!}[g]^{2i+1}\right) \quad = \quad -b\left((-1)^{i+1}\frac{(2i+1)!}{(i+1)!}[g]^{2i+3}\right),$$

ce qui implique la validité de $(1)_0^i$. □

***Théorème 2.5.*** — *L'application $k$-linéaire $\Upsilon_*$ définie, pour tout $n \geq 0$ et $i \geq 1$, par*

$$\Upsilon_n^0 = \mathrm{id} \text{ et } \Upsilon_n^i = (-1)^i(S_{\mathrm{id}}B)^i + (-1)^i\sum_{k=0}^{i-1}(S_{\mathrm{id}}B)^k S_{\mathrm{id}}((S_b B)^{i-k}b)$$

*est un morphisme de complexes $G$-linéaire de $E_*(G)$ dans $\mathcal{B}E_*^-(G)$ induisant une injection de $H_*(G)$ dans $HC_*^-(G)$.*

On notera encore $\Upsilon_* : C_*(G) \to \mathcal{B}C_*^-(G)$ l'application induite par $k\otimes_{k[G]} -$.

*Démonstration*: On doit montrer que la famille d'applications linéaires $(\Upsilon_n^i)_{n,i\geq 0}$ vérifie l'égalité $(1)_n^i$ pour tous $n \geq 0, i \geq 0$. On pose $\Upsilon_{-1} = 0$. Comme $\Upsilon_n^0 = \mathrm{id}$, on a $b\Upsilon_*^0 = \Upsilon_{*-1}^0 b$ et donc $(1)_*^0$ est vérifiée.

Pour commencer, $\Upsilon_0$ vérifie $(1)_0^*$ car l'application $\Upsilon_0$ définie dans le théorème 2.5 coïncide avec celle qui est définie au lemme 2.4.

L'application $\Upsilon_*$ vérifie les formules suivantes pour $n \geq 1$, $i \geq 1$ :

$$\Upsilon_n^i = S_{\mathrm{id}}(\Upsilon_{n-1}^i b - B\Upsilon_n^{i-1}). \qquad (2)_n^i$$

En effet, si $g_0,...,g_n \in G$, par définition de $\Upsilon_*$, on a

$$\begin{aligned}\Upsilon_{n-1}^i b[g_0,...,g_n] &= (-1)^i\left((S_{\mathrm{id}}B)^i + (-1)^i\sum_{k=0}^{i-1}(S_{\mathrm{id}}B)^k S_{\mathrm{id}}((S_b B)^{i-k}b)\right)b[g_0,...,g_n] \\ &= (-1)^i\left((s_{(g_1)}B)^i[g_1,...,g_n] + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j(s_{(g_0)}B)^i[g_0,...,\widehat{g_i},...,g_n]\right)\end{aligned}$$

car $b^2 = 0$ et par définition de $S_{\mathrm{id}}$, $S_d$. On trouve donc

$$\Upsilon^i_{n-1} b[g_0, ..., g_n] = (-1)^i (S_b B)^i b[g_0, ..., g_n].$$

Regardons $B\Upsilon^{i-1}_n$ pour $n \geq 0$, $i \geq 1$ :

$$-B\Upsilon^{i-1}_n = (-1)^i B(S_{\mathrm{id}} B)^{i-1} + (-1)^i B \sum_{k=0}^{i-2} (S_{\mathrm{id}} B)^k S_{\mathrm{id}}((S_b B)^{i-1-k} b).$$

On applique maintenant les expressions obtenues pour calculer $-S_{\mathrm{id}} B\Upsilon^{i-1}_n$ et $S_{\mathrm{id}} \Upsilon^i_{n-1} b$.

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{id}}(\Upsilon^i_{n-1} b - B\Upsilon^{i-1}_n) &= (-1)^i \Big( S_{\mathrm{id}}((S_b B)^i b) + S_{\mathrm{id}} B(S_{\mathrm{id}} B)^{i-1} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{i-2} S_{\mathrm{id}} B(S_{\mathrm{id}} B)^k S_{\mathrm{id}}((S_b B)^{i-1-k} b) \Big) = \Upsilon^i_n \end{aligned}$$

ce qui prouve $(2)^i_n$ pour $n \geq 0$, $i \geq 1$.

Prouvons maintenant le théorème par récurrence sur $n \geq 0$. Il faut montrer que pour tout $n \geq 0$, $(1)^*_n$ est vérifiée et que $\Upsilon_n$ est $G$-linéaire. On a obtenu le résultat pour $n = 0$. Supposons avoir vérifié les égalités $(1)^*_m$ et la $G$-linéarité de $\Upsilon_m$ pour tout indice $m \leq n$. Démontrons alors les équations $(1)^i_{n+1}$ où $i \geq 0$. Comme on a déjà établi le résultat pour $i = 0$, on raisonne par récurrence sur $i$. Supposons donc avoir prouvé $(1)^j_{n+1}$ pour $j \leq i$ et étudions $(1)^{i+1}_{n+1}$. Si $g_0, ..., g_n \in G$, d'après la formule $(2)^{i+1}_{n+1}$, on a

$$\begin{aligned} b\Upsilon^{i+1}_{n+1}[g_0, ..., g_{n+1}] &= b s_{g_0}(\Upsilon^{i+1}_n b - B\Upsilon^i_{n+1})[g_0, ..., g_{n+1}] \\ &= -s_{g_0} b(\Upsilon^{i+1}_n b - B\Upsilon^i_{n+1})[g_0, ..., g_{n+1}] \\ &\quad + (\Upsilon^{i+1}_n b - B\Upsilon^i_{n+1})[g_0, ..., g_{n+1}] \end{aligned}$$

par le $i$) du lemme 2.2. Or, les égalités $(1)^{i+1}_n$ et $b^2 = 0$ donnent

$$b\Upsilon^{i+1}_n b = (\Upsilon^{i+1}_{n-1} b - B\Upsilon^i_n) b = -B\Upsilon^i_n b.$$

De plus $bB = -Bb$ implique $bB\Upsilon^i_{n+1} = -Bb\Upsilon^i_{n+1}$. Les égalités $(1)^i_{n+1}$ et $B^2 = 0$ donnent $bB\Upsilon^i_{n+1} = -B\Upsilon^i_n b$. D'où

$$b\Upsilon^{i+1}_{n+1}[g_0, ..., g_{n+1}] = (\Upsilon^{i+1}_n b - B\Upsilon^i_{n+1})[g_0, ..., g_{n+1}]$$

pour tout $[g_0, ..., g_{n+1}]$ ce qui démontre $(2)^{i+1}_{n+1}$ et assure que $\Upsilon_*$ est un morphisme de complexes.

On démontre de même la $G$-linéarité de $\Upsilon_*$. En effet $\Upsilon^*_0$ et $\Upsilon^0_* = \mathrm{id}$ sont $G$-linéaires. Supposons que $\Upsilon^*_{n-1}$ et $\Upsilon^{i-1}_n$ ($n \geq 1$, $i \geq 1$) le soient également, alors quel que soient $g, g_0, ..., g_n \in G$, en appliquant la formule $(2)^i_n$ et le lemme 2.2, on a

$$\begin{aligned} \Upsilon^i_n[g.g_0, ..., g.g_n] &= s_{(g.g_0)} \left( \Upsilon^i_{n-1} b - B\Upsilon^{i-1}_n \right) [g.g_0, ..., g.g_n] \\ &= g. \left( s_{(g_0)} \left( \Upsilon^i_{n-1} b - B\Upsilon^{i-1}_n \right) [g_0, ..., g_n] \right). \end{aligned}$$

En particulier $\Upsilon^i_n$ est alors $G$-linéaire; on conclut une nouvelle fois par récurrence. □

**2.3. Etude de $\Upsilon_*$ dans les complexes normalisés.** — Dans la suite on travaillera le plus souvent avec des complexes normalisés pour simplifier les formules. On va donner dans cette partie une formule explicite pour $\Upsilon_* : \overline{C}_*(G) \to \overline{\mathcal{B}C}^-_*(G)$. Remarquons que, dans $C_*(G)$, on peut toujours supposer qu'une chaîne s'écrit $[1, g_1, ..., g_n]$. En pratique, les cycles de $C_*(G)$ apparaissent naturellement sous cette forme (ce sera le cas pour les cycles étudiés dans les paragraphes 3, 4).

Si $n \geq 1$ et $i \geq 1$ on note $I_n^i$ l'ensemble

$$I_n^i = \{\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n, j) \in \mathbb{N}^{\times n} \times \{1, ..., n\} \mid \alpha_0 + ... + \alpha_n = i - 1\}.$$

On note $\Gamma_n^i : E_n(G) \to E_{n+2i}(G)$ ($n \geq 1$, $i \geq 1$) l'application $k$-linéaire définie, pour $g_0, ..., g_n \in G$, par

$$\Gamma_n^i([g_0, ..., g_n]) = \sum_{\alpha \in I_n^i} \eta_\alpha [g_0, g_j, [g_0, g_j]^{\alpha_0}, g_{j+1}, [g_0, g_{j+1}]^{\alpha_{j+1}}, g_{j+2}, [g_0, g_{j+2}]^{\alpha_{j+2}}, ... \\ \dots, g_j, [g_0, g_j]^{\alpha_j}]$$

avec $\eta_\alpha = (-1)^{n(n-j)+i}(i-1)!$. On peut remarquer que $\Gamma_*^*$ est $G$-linéaire et donc définit une famille d'applications $\Gamma_n^i : C_n(G) \to C_{n+2i}(G)$ ($n$, $i \geq 1$).

Pour $n \geq 1$, $1 \leq k < i$, on introduit l'ensemble suivant

$$K_n^{k,i} = \Big\{\beta = \big((\beta_0^0, ..., \beta_0^{\alpha_0}), (\beta_1^0, ..., \beta_1^{\alpha_1}), ..., (\beta_n^0, ..., \beta_n^{\alpha_n}), (\rho_0^1, ...\rho_0^{\alpha_0}), \dots, (\rho_n^0, ..., \rho_n^{\alpha_n}), j, \rho_0^0\big), \\ (\text{ avec } \alpha_*, \beta_*^*, \rho_*^* \in \mathbb{N} \text{ et } 2 \leq j \leq n) \mid \alpha_1 = 0, \alpha_0 + ... + \alpha_n = i - k - 1 \\ \text{et } \rho_0^0 + \sum_{p=0}^{n} \left(\beta_p^0 + \sum_{q=1}^{\alpha_p} \beta_p^q + \rho_p^q\right) = k. \Big\}$$

Si $n \geq 1$, $1 \leq k \leq i-1$, on note $\nabla_n^{k,i} : E_n(G) \to E_{n+2i}(G)$ l'application $G$-linéaire définie, pour $g_1, ..., g_n \in G$, par

$$\nabla_n^{k,i}[1, g_1, ..., g_n] = \\ \widetilde{N} \sum_{\beta \in K_n^{k,i}} \eta_\beta \Big[1, g_1, [\widetilde{1}, g_1]^{\rho_0^0}, g_j, [\widetilde{1}, g_j]^{\beta_0^0}, ]_0[, g_{j+1}, [\widetilde{1}, g_{j+1}]^{\beta_{j+1}^0}, ]_{j+1}[, ..., g_j, [\widetilde{1}, g_j]^{\beta_j^0}, ]_j[\Big]$$

avec $\eta_\beta = (-1)^{(n-1)(n-j)}(i-1-k)!(k-1)!$ et $]_p[$ est vide si $\alpha_p = 0$ et sinon

$$]_p[= \Big[g_1, [\widetilde{1}, g_1]^{\rho_p^1}, g_p, [\widetilde{1}, g_p]^{\beta_p^1}, ..., g_1, [\widetilde{1}, g_1]^{\rho_p^{\alpha_p}}, g_p, [\widetilde{1}, g_p]^{\beta_p^{\alpha_p}}\Big] ;$$

pour $p = 0$, on remplace les $g_p$ qui apparaissent dans la formule de $]_p[$ par $g_j$. Dans cette formule $\widetilde{N}$ est défini comme dans la partie 1.

***Théorème 2.6.*** — *Dans $\overline{\mathcal{B}E}^-_*(G)$, pour $a, b \in G$, on a*

$$\Upsilon_0[a] = [a]u^0 \text{ et } \Upsilon_1[a, b] = \sum_{i \geq 0} (-1)^i i! [a, b]^{\times i+1} u^i.$$

*Si $n \geq 2$ et $g_1, ..., g_n \in G$, on a dans $\overline{C}_*(G)$ les formules suivantes*

**(a) :** $\Upsilon_n^0[1, g_1, ..., g_n] = [1, g_1, ..., g_n]$,

**(b) :** $\Upsilon_n^1[1, g_1, ..., g_n] = \Gamma_n^1[1, g_1, ..., g_n] + s_{(1)}\Gamma_{n-1}^1[g_1, ..., g_n]$, *et si $i \geq 2$*

**(c) :** $\Upsilon_n^i[1, g_1, ..., g_n] = \Gamma_n^i[1, g_1, ..., g_n] + s_{(1)}\Gamma_{n-1}^i[g_1, ..., g_n] + \sum_{k=1}^{i-1} \nabla_n^{k,i}[1, g_1, ..., g_n]$.

On écrit facilement la formule définissant $\Gamma_n^i[1, ..., g_n]$ de la manière suivante : on part de la chaîne $[1, g_1, ..., g_n]$ et on insère $i$ fois une paire $[1, g_j]$ (avec $1 \leq j \leq n$). Une telle insertion se fait toujours juste à droite de l'élément $g_j$ initial. Ensuite on effectue toutes les permutations cycliques (avec signe) $t^\ell$ qui place un des 1 "insérés" en position 0 et enfin on multiplie par $(-1)^i(i-1)!$.

On peut de même écrire les chaînes apparaissant dans la définition de $\nabla_n^{k,i}$. On part de $[g_1, ..., g_n]$, puis on insère $i-k$ fois une chaîne $[g_1, g_j]$ $(2 \leq j \leq n)$. Les insertions se font toujours à droite du $g_j$ initial. Ensuite on ajoute 1 à gauche d'un $g_1$ inséré. Puis on insère $k$ fois des chaînes du type $[\tilde{1}, g_j]$ avec cette fois $1 \leq j \leq n$. On finit en multipliant par $(-1)^{(n-1)(n-j)+i}(k-1)!(i-k-1)!$ et en faisant agir $\widetilde{N}$ c'est à dire toutes les permutations cycliques qui placent un 1 étiqueté en position 0. Cette construction apparaît clairement dans le lemme suivant.

***Lemme 2.7.*** — *Pour $n \geq 1$, $j \geq 0$, $1 \leq k < i$, dans dans $\overline{E}_{n+2i}(G)$, on a:*

$$\Gamma_n^j = (-1)^j (S_{\mathrm{id}} B)^j, \quad \nabla_n^{k,i} = \Gamma_{n+2(i-k)}^k S_{\mathrm{id}}(\Gamma_{n-1}^{i-k} d_0).$$

*Démonstration du Lemme*: Pour $g_0, ..., g_n \in G$, on a

$$\begin{aligned}(s_{(g_0)}B)[g_0, ..., g_n] &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n(n-j)}[g_0, g_j, g_{j+1}, ..., g_{j-1}, g_j] \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n(n-j)}[g_0, g_j, g_{j+1}, ..., g_{j-1}, g_j]\end{aligned}$$

(car $[g_0, g_0, g_1, ...]$ est nul dans $\overline{E}_*(G)$); c'est, au signe $-1$ près, la formule donnée dans le lemme pour $\Gamma_n^1$ (si $\alpha \in I_n^1$, alors $\eta_\alpha = (-1)^{n(n-i)+1}$ et $\alpha_0 = ... = \alpha_n = 0$). De plus

$$(-1)^{n(n-j)}[g_0, g_j, g_{j+1}, ..., g_{j-1}, g_j] = t^{n-j}[g_0, g_1 ..., g_j, [g_0, g_j], g_{j+1}, ..., g_n].$$

On en déduit

$$\begin{aligned}(s_{(g_0)}B)^2[g_0, ..., g_n] &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n(n-j)} \sum_{k=1}^{n} [g_0, g_j, g_{j+1}, ..., g_k, [g_0, g_k], g_{k+1}, ..., g_j] \\ &= \Gamma_n^2[g_0, ..., g_n].\end{aligned}$$

Pour $\Gamma_n^i$, $i \geq 2$, on obtient la formule du lemme après $i-1$ itérations du calcul précédent. La formule pour $\nabla_n^{i,k}$ s'obtient directement en "composant" les formules obtenues pour $\Gamma_*^*$. $\square$

*Démonstration du Théorème 2.6* : Par définition $\Upsilon_*^0$ est l'identité. Dans les complexes normalisés, la formule du lemme 2.4 ne donne des termes que dans la colonne 0.

D'après le théorème 2.5, pour $n \geq 1, i \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\Upsilon_n^i[g_0,...,g_n] &= (-1)^i\left((s_{(g_0)}B)^i + \sum_{k=0}^{i-1}(s_{(g_0)}B)^k s_{(g_0)}\left((s_{(g_1)}B)^{i-k}d_0\right.\right.\\ &\left.\left. + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j(s_{(g_0)}B)^{i-k}d_j\right)\right)[g_0,...,g_n] \quad \text{car } b=\sum d_j.\end{aligned}$$

Mais une chaîne de la forme $[..., g_0, g_0, ...]$ est triviale dans $\overline{E}_*(G)$, donc

$$\left(\sum_{k=0}^{i-1}(s_{(g_0)}B)^k s_{(g_0)}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(s_{(g_0)}B)^{i-k}d_j\right)\right)[g_0,...,g_n] = 0 \in \overline{E}_*(G).$$

On obtient alors la formule suivante (pour $n,\ i \geq 0$)

$$\Upsilon_n^i = (-1)^i\sum_{k=0}^{i}(S_{\mathrm{id}}B)^k S_{\mathrm{id}}((S_{d_0}B)^{i-k}d_0). \tag{3.6.1}$$

Pour $n=1,\ i\geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\Upsilon_1^i[a,b] &= (-1)^i\sum_{k=0}^{i}(s_{(a)}B)^k s_{(a)}(s_{(b)}B)^{i-k}[b]\\ &= (-1)^i(s_{(a)}B)^k s_{(a)}[b]\\ &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i i![a,b]^{i+1}u^i.\end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$, le Lemme 2.7 et la formule (3.6.1) impliquent que

$$\Upsilon_n^i = \Gamma_n^i + S_{\mathrm{id}}(\Gamma_{n-1}^i d_0) + \sum_{k=1}^{i-1}\nabla_n^{k,i},$$

ce qui termine la démonstration du Théorème 2.6. □

*Remarque* : Un élément inversible $a$ d'un anneau $A$ définit un élément dans $K_1(A)$ donné par la matrice $[a] \in GL_1(A)$. Son image par le morphisme d'Hurewicz $H$ : $K_1(A) \to H_1(GL(A))$ est le cycle $[1,a] \in C_1(GL(A))$. Le Théorème 2.6 permet alors de calculer son caractère de Chern :

$$\begin{aligned}ch_1(a) &= \mathrm{tr}(\varphi(\Upsilon_1([1,a]))) = \mathrm{tr}(\varphi(\sum_{i\geq 0}(-1)^i i![1,a]^{i+1}u^i))\\ &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i i!(a^{-1},a)^{i+1}u^i.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule donnée dans [**16**], Théorème 10.2.

## 3. Le caractère de Chern en bas degré

Rappelons maintenant la définition du groupe $K_2(A)$ donnée par Milnor dans [**25**]. On note $St(A)$ le groupe de Steinberg $St(A)$ de l'anneau $A$ et $x_{i,j}(t)$, $i,j\geq 1, i\neq j$, $t\in A$ ses générateurs. Il y a un morphisme de groupes $\psi : St(A)\to E(A)$ qui envoie $x_{i,j}(t)$ sur $e_{i,j}(t)$ (la matrice élémentaire avec $t$ comme coefficient à l'intersection de la ligne $i$ et de la colonne $j$) et une suite exacte

$$1\to K_2(A)\to St(A)\xrightarrow{\psi} E(A)\to 1.$$

**3.1. Le caractère de Chern en degré 2.** — Dans ce paragraphe on va donner une formule générale pour le caractère de Chern d'un élément de $K_2(A)$ défini comme sous-groupe de $St(A)$.

Posons $J_p^q=\{\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_p)\in\mathbb{N}^p \mid \alpha_1+...+\alpha_p=q\}$.

***Théorème 3.1.*** — *Soit* $x = x_{i_1,j_1}(t_1)...x_{i_n,j_n}(t_n) \in K_2(A)$. *En notant* $e_r = e_{i_r,j_r}(t_r)$, $E_r=e_1...e_r$ $(1\leq r\leq n)$) *on a :*

$$\begin{aligned} ch_2(x) \quad = \quad \mathrm{tr}\Bigg(\sum_{r=2}^{n}\sum_{i\geq 0}&\left((-1)^i i!(E_r^{-1},E_{r-1},e_r,(e_r^{-1},e_r)^i)\right.\\ &+(-1)^i\sum_{k=0}^{i-1}(i-k-1)!k!\sum_{\alpha\in J_{2(k+1)}^{i-k}}\widetilde{N}\big(E_r^{-1},E_{r-1},(\widetilde{E}_{r-1}^{-1},E_{r-1})^{\alpha_1},e_r,(\widetilde{E}_r^{-1},E_r)^{\alpha_2},\\ &\left. e_r^{-1},(\widetilde{E}_{r-1}^{-1},E_{r-1})^{\alpha_3},...,e_r^{-1},(\widetilde{E}_{r-1}^{-1},E_{r-1})^{\alpha_{2k+1}},e_r,(\widetilde{E}_r^{-1},E_r)^{\alpha_{2k+2}}\big)\right)u^i\Bigg).\end{aligned}$$

Rappelons une formule explicite pour l'isomorphisme de groupe $H : K_2(A)\to H_2(E(A))$ [**25**]. Soit $1\to R\to F\to G\to 1$ une présentation d'un groupe $G$, le groupe $F$ étant libre sur l'ensemble $S$. La formule de Hopf énonce que $H_2(G)\cong (R\cap[F,F])/[R,F]$ et cet isomorphisme s'explicite via le calcul différentiel de Fox (*cf.* [**1**], [**7**]). Soit $\varphi^{\mathrm{bar}} : C_*^{\mathrm{bar}}(G)=k[G^*]\to C_*(G)$ l'isomorphisme de complexe donné par

$$\varphi^{\mathrm{bar}}[g_1|\dots|g_n]=[1,g_1,g_1g_2,\dots,g_1g_2\dots g_n].$$

Si $f\in F$, $a,b\in G$, alors $f[a\mid b]=[\overline{f}a\mid b]$ munit $C_2^{\mathrm{bar}}(G)$ d'une structure de $F$-module à gauche. Soit alors $\delta : F\to C_2^{\mathrm{bar}}(G)$ la dérivation (unique) définie par $\delta(f)=\sum_{s\in S}[\overline{df/ds}\mid\overline{s}]$. La restriction de $\delta$ à $R\cap[F,F]$ induit l'isomorphisme de Hopf. De plus, supposons que $r=\{a_1,b_1\}...\{a_n,b_n\}\in R$ (on note $\{x,y\}$ le commutateur de $x$ et $y$), alors on a

$$\delta(r)=\sum_{i=1}^{n}\left([R_{i-1}\mid\overline{a}_i]+[R_{i-1}\overline{a}_i\mid\overline{b}_i]-[R_i\overline{b}_i\mid\overline{a}_i]-[R_i\mid\overline{b}_i]\right). \tag{3.1.1}$$

***Lemme 3.2.*** — *Si* $x=x_{i_1,j_1}(t_1)...x_{i_n,j_n}(t_n)\in K_2(A)$, *l'isomorphisme d'Hurewicz* $H : K_2(A)\to H_2(E(A))$ *est donné dans* $\overline{C}_2(E(A))$ *par le cycle suivant :*

$$H(x)=\sum_{k=2}^{n}[1,E_{k-1},E_k]$$

*où $E_k$ $(k \geq 1)$ est défini comme dans le théorème 3.1.*

*Démonstration*: Soit $F$ le groupe libre engendré par les symboles $x_{i,j}(t)$ où $i, j \geq 1$, $i \neq j$ et $t \in A$. Soit $R$ le sous-groupe normal de $F$ engendré par les relations définissant le groupe de Steinberg et par les éléments de $K_2(A)$. On a alors $G = F/R = E(A)$ et
$\delta(x_{i_1,j_1}(t_1)...x_{i_n,j_n}(t_n)) = \delta(x_{i_1,j_1}(t_1)) + \ldots + x_{i_1,j_1}(t_1)...x_{i_{n-1},j_{n-1}}(t_{n-1})\delta(x_{i_n,j_n}(t_n))$.
Donc, dans $\overline{C}_2(E(A))$, on a (en posant $E_0 = 1$)

$$H(x) = \varphi^{\mathrm{bar}} \sum_{k=1}^{n} [E_{k-1} \mid e_{i_k,j_k}(t_k)] = \sum_{k=2}^{n} [1, E_{k-1}, E_k].$$

Le terme pour $k = 1$ est $[1, 1, E_1]$, donc est trivial dans le normalisé $\overline{C_2}(E(A))$. $\square$

*Démonstration du Théorème 3.1* : Pour $x = x_{i_1,j_1}(t_1)...x_{i_n,j_n}(t_n) \in K_2(A)$, on doit calculer $\mathrm{tr} \circ \varphi \circ \Upsilon_2 \circ H(x) \in HC_2^-(A)$. Les formules explicites pour tr, $\varphi$ et les formules du lemme 3.2 et du théorème 2.6 donne le résultat. $\square$

**3.2. Symboles en degré 2.** — On calcule ici le caractère de Chern d'éléments importants du groupe $K_2$ comme les symboles de Steinberg [**25**] et ceux de Dennis et Stein [**6**], [**23**]. Si $a, b$ sont deux éléments inversibles d'un anneau $A$ qui commutent, considérons des relèvements $\check{X}_a, \check{X}'_b$ des matrices diagonales $X_a = \mathrm{diag}(a, a^{-1}, 1)$, $X'_b = \mathrm{diag}(b, 1, b^{-1})$. L'élément $\{a, b\} = [\check{X}_a, \check{X}'_b] \in K_2(A)$ est appelé *symbole de Steinberg*. Pour $a$, $b \in A$, $0 \leq k < i$, notons

$$\mathrm{ST}^i_k(a,b) =$$
$$\widetilde{N}\Big( \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{2k+2}=i-k} ((ab)^{-1}, a, (\widetilde{a}^{-1}, a)^{\alpha_1}, b, (\widetilde{ab}^{-1}, ab)^{\alpha_2}, b^{-1}, (\widetilde{a}^{-1}, a)^{\alpha_3}, ..., b, (\widetilde{ab}^{-1}, ab)^{\alpha_{2k+2}})\Big)$$

où $\widetilde{N}$ est défini au paragraphe 1.

***Théorème 3.3***. — *Le caractère de Chern du symbole de Steinberg $\{a, b\}$ est représenté par le cycle*

$$\begin{aligned} ch_2(\{a,b\}) &= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \Bigg( i!((ab)^{-1}, a, (b, b^{-1})^i, b) - ((ab)^{-1}, b, (a, a^{-1})^i, a) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{i-1} (i-k-1)!k!(\mathrm{ST}^i_k(a,b) - \mathrm{ST}^i_k(b,a)) \Bigg) u^i. \end{aligned}$$

*Démonstration*: L'élément $\{a, b\} = [\check{X}_a, \check{X}'_b]$ est un commutateur de deux matrices de $St(A)$. Donc, d'après la formule (3.1.1), on a

$$\begin{aligned} H(\{a,b\}) &= \varphi^{\mathrm{bar}}([X_a \mid X'_b] - [X'_b \mid X_a]) \\ &= [1, X_a, X_a X'_b] - [1, X'_b, X_a X'_b] \end{aligned}$$

par commutativité de $X_a$ et $X'_b$. On obtient donc

$$ch_2(\{a,b\}) = \mathrm{tr}\left(\varphi\left(\Upsilon_2\left([1, X_a, X_a X'_b] - [1, X'_b, X_a X'_b]\right)\right)\right).$$

Les matrices $X_a$, $X'_b$, $X_aX'_b$ sont diagonales. Après composition par $\Upsilon_2$ et $\varphi$, on obtient des chaînes de $k[GL_3(A)]^{\otimes 2+2*} \subset C_{2+*}(k[GL(A)])$ de la forme $k_j(M_0^j, M_1^j, ..., M_{2+2*}^j)$, ($j \in \mathbb{N}$, $k_j \in k$) où les matrices $M_\ell^j \in GL_3(A)$ ($0 \leq \ell \leq n+2*$, $j \geq 0$) sont diagonales et égales à $X_a$, $X'_b$, $X_aX'_b$ ou leurs inverses. Ainsi

$$\mathrm{tr}(\varphi\Upsilon_2)([1, X_a, X_aX'_b] - [1, X'_b, X_aX'_b]) \quad = \quad \varphi\Upsilon_2([1, a, ab] - [1, b, ab])$$

dans le complexe normalisé $\overline{\mathcal{BC}_2^-}(A)$. Le calcul de $\varphi(\Upsilon_2)([1, a, ab] - [1, b, ab])$ est analogue à celui de $\varphi\Upsilon_2([1, E_{r-1}, E_r])$ effectué dans la preuve du Théorème 3.1. □

Passons maintenant aux symboles de Dennis et Stein. Soient $a, b$ deux éléments de $A$ qui commutent et tels que $1 - ab$ soit inversible. Pour $i \neq j$, notons

$$P_{i,j}(a, b) = x_{j,i}(-b(1-ab)^{-1})x_{i,j}(-a)x_{j,i}(b)x_{i,j}((1-ab)^{-1}a) \in St(A).$$

Le *symbole de Dennis-Stein* associé est par définition l'élément

$$< a, b > = P_{i,j}(a, b)P_{i,j}^{-1}(ab, 1) \in K_2(A).$$

On associe à $< a, b >$ les matrices de $E(A)$ suivantes:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -s(1-as)^{-1} & (1-as)^{-1} \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}, \ V = \begin{bmatrix} 1-as & -a \\ 0 & (1-as)^{-1} \end{bmatrix}.$$

On note $\overline{J_q^p}$ l'ensemble suivant

$$\overline{J_p^q} = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{2q+2}) \in \mathbb{N}^{2q+2} \mid \alpha_1 + ... + \alpha_{2q+2} = p \text{ et } \alpha_2, ..., \alpha_{2q+1} \geq 1\}.$$

***Théorème 3.4***. — *Le caractère de Chern des symboles de Dennis et Stein est représenté par le cycle* $\sum_{i\geq 0} ch_2^i(< a, b >)u^i$ *où*

$$ch_2^0(< a, b >) = (1, b(1-ab)^{-1}, a) + (a, (1-ab)^{-1}, b) - ((1-ab)^{-1}, a, b) - (1, (1-ab)^{-1}, ab),$$

$$\begin{aligned} ch_2^i(< a, b >) \quad &= \quad i![(1, (b(1-ab)^{-1}, a)^{i+1}) - (1, ((1-ab)^{-1}, ab)^{i+1})] \\ &+(-1)^i \sum_{k=0}^{i/3} (i-k-1)!k! \sum_{\alpha \in \overline{J_k^{i-k}}} \widetilde{N}(V^{-1}, T, (\widetilde{T}^{-1}, T)^{\alpha_1}, U, (\widetilde{V}^{-1}, V)^{\alpha_2}, \\ &U^{-1}, (\widetilde{T}^{-1}, T)^{\alpha_3}, ..., U^{-1}, (\widetilde{T}^{-1}, T)^{\alpha_{2k+1}}, U, (\widetilde{V}^{-1}, V)^{\alpha_{2k+2}}). \quad (i > 0). \end{aligned}$$

*Démonstration*: On raisonne comme dans les démonstrations des théorèmes 3.3 et 4.3. □

Dans le cas où $ab = 0$, le symbole $< a, b >$ coïncide avec l'opposé du symbole de Loday $<< a, b >>$ ([**19**]).

***Corollaire 3.5***. — *Soit $A$ un anneau contenant $\mathbb{Q}$. Si $a, b \in A$ sont tels que $ab = 0$, alors le caractère de Chern du symbole de Loday $<< a, b >>$ est*

$$ch_2(<< a, b >>) = ((1, a, b) - (1, b, a))u^0 = B(a, b)u^0.$$

*Démonstration*: Quand $ab = 0$, d'après le Théorème 3.4, on a

$$ch_2^0(< a, b >) = (1, a, b) - (1, b, a) = B(a, b).$$

Pour $i \geq 1$, on trouve (dans $\overline{C}_{2+2i}(A)$)

$$ch_2^i = i!(1, (a, b)^{i+1}) - i!(1, (b, a)^{i+1}).$$

Si $A$ contient $\mathbb{Q}$, alors, en notant $z(a, b) = \sum_{i \geq 1}(i!/(i+1))(a, b)^{i+1}u^{i-1}$,

$$(b + B)\,(z(a, b)) = i! \sum_{i \geq 1}((1, (a, b)^{i+1}) - (1, (b, a)^{i+1}))u^i$$

ce qui assure que les termes des colonnes strictement négatives sont des bords. □

*Remarque* : *i*) Cette formule est valable dans le complexe non normalisé $\mathcal{B}C_2^-(A)$.

*ii*) Si $A$ ne contient pas $\mathbb{Q}$, on peut quand même définir l'élément $z(a, b)$ (apparaissant dans la preuve du corollaire 3.5) sur les colonnes $-i$ telles que $i + 1$ ne soit pas premier. On trouve alors, en notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers $p$ premiers,

$$ch_2^i(<< a, b >>) = \sum_{p \in \mathcal{P}}(p-1)!\,((1, (a, b)^p) - (1, (b, a)^p))\,u^{p-1}.$$

*Exemple* : Quand $A$ est une $k$-algèbre *commutative* contenant $\mathbb{Q}$, on sait qu'il existe une application $\pi_n : \overline{C}_n(A) \to \Omega_A^n$ (pour tout $n \geq 0$), où $\Omega_A^n$ est le $n^{\text{ième}}$ module extérieur sur l'algèbre $\Omega_A^1$ des formes différentielles c sur $A$, donnée par:

$$\pi_n(a_0, ..., a_n) = 1/n!\; a_0 da_1 ... da_n.$$

Elle induit un morphisme de bicomplexes de $(\mathcal{B}C_*^-(A), b, B)$ dans $(\mathcal{B}N\Omega_A^*, 0, d)$, où $\mathcal{B}N\Omega_A^{p,q} = \Omega_A^{q-p}$, et c'est un quasi-isomorphisme si $A$ est lisse, *cf.* [**22**]. La formule du théorème 3.4 donne $\pi_2 \circ ch_2(< a, b >) = (-(1-ab)^{-1}dadb)u^0$ et on a

***Corollaire 3.6***. — *Si $A$ est une $k$-algèbre commutative lisse contenant $\mathbb{Q}$, alors*

$$ch_2(< a, b >) = (-(1-ab)^{-1}dadb)u^0) = D_2(< a, b >)u^0.$$

On retrouve en particulier un calcul de [**4**] pour la trace de Dennis.

*Remarque* : Dans de nombreux cas les groupes $K_2(A)$ ou $K_2(A, I)$ sont engendrés par les symboles de Dennis et Stein (voir, par exemple, [**25**], [**23**], [**6**], [**30**], [**26**]).

## 4. Symboles en degré supérieurs

Dans cette partie on calcule le caractère de Chern des symboles de Loday $<< b_1, ..., b_n >>$ et des symboles de Steinberg généralisés $\{a_1, ..., a_n\}$ pour $n > 2$.

Lorsque $A$ est un anneau commutatif, on a un produit gradué commutatif ([**18**], voir aussi le paragraphe 5)

$$K_p(A) \times K_q(A) \xrightarrow{*} K_{p+q}(A).$$

En particulier, si $a_1, ..., a_n$ sont des éléments inversibles de $A$ et $\{a_1\}, ..., \{a_n\}$ leurs images dans $K_1(A)$, alors $\{a_1, ..., a_n\} = \{a_1\} * ... * \{a_n\}$ est dans $K_n(A)$.

Soit $A$ non nécessairement commutatif, muni de matrices $m_1, ..., m_n \in GL_r(A)$ qui commutent deux à deux et $\theta$ l'unique morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n, x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}] \to \mathcal{M}_r(A)$ qui envoie chaque $x_i$ sur $m_i$. On note $\{m_1, ..., m_n\} = \theta_*\{x_1, ..., x_n\} \in K_n(A)$.

**4.1. Symboles de Steinberg généralisés.** — Si $a_1, ..., a_n \in A$ sont des éléments inversibles qui commutent, *le symbole de Steinberg généralisé* est

$$\{a_1, ..., a_n\} = \theta_*(\{x_1, ..., x_n\}) \in K_n(A).$$

***Théorème 4.1.*** — *Soient $a_1, ..., a_n$ des éléments inversibles d'un anneau $A$ qui commutent deux à deux. L'image de $\{a_1, ..., a_n\}$ est représentée dans $\mathcal{B}C_*^-(A)$ par le cycle*

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_n(\{a_1, ..., a_n\}) \quad = \quad \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) & \left( \sum_{i \geq 0} \varphi \left( s_{(1)} \Gamma_{n-1}^{i-1} [\overline{a}_1^\sigma, ..., \overline{a}_n^\sigma] \right.\right. \\ & \left.\left. + \Gamma_n^i + \sum_{k=1}^{i-1} \nabla_n^{k,i} )[1, \overline{a}_1^\sigma, ..., \overline{a}_n^\sigma] \right) u^i \right)\end{aligned}$$

*où $\overline{a}_j^\sigma = a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} ... a_{\sigma(j)}$ pour $j = 1...n$ (les notations sont celles du Théorème 2.6).*

*Remarque* : On constate que la formule donnée par le Théorème 4.1 pour $n = 2$ est la même que celle donnée par le Théorème 3.3.

Avant de démontrer ce théorème, calculons l'image par le morphisme d'Hurewicz des symboles $\{m_1, ..., m_n\}$. Dans $GL_*(A)$, on a les opérateurs suivants :

$$\begin{array}{lll} GL_*(A) \xrightarrow{\mathrm{diag}^1} GL_{3*}(A) & GL_*(A) \xrightarrow{\mathrm{diag}^2} GL_{3*}(A) & GL_*(A) \xrightarrow{\mathrm{inc}} GL_{3*}(A) \\ m \mapsto diag(m, m^{-1}, 1), & m \mapsto diag(m, 1, m^{-1}), & m \mapsto diag(m, 1, 1). \end{array}$$

On associe à $m_1, ..., m_n$, les matrices $M_i$ $(i = 1...n)$ de $GL_{3^{n-1}r}(A)$ définies par

$$\begin{aligned} M_1 = (\mathrm{diag}^1)^{n-1}(m_1), \quad M_2 = (\mathrm{diag}^1)^{n-2}\mathrm{diag}^2(m_2) \\ \text{et } M_i = (\mathrm{diag}^1)^{n-i}\mathrm{diag2}(\mathrm{inc})^{i-2}(m_i) \text{ pour } i = 3...n. \end{aligned}$$

***Lemme 4.2.*** — *Soient $m_1, ..., m_n$ des éléments de $GL_r(A)$ qui commutent. L'image de l'élément $\{m_1, ..., m_n\}$ par le morphisme d'Hurewicz $H : K_n(A) \to H_n(GL(A))$ est donnée par le cycle*

$$H(\{m_1, ..., m_n\}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma)[1, M_{\sigma(1)}, M_{\sigma(1)}M_{\sigma(2)}, ..., M_{\sigma(1)}M_{\sigma(2)}...M_{\sigma(n)}]$$

*où $\Sigma_n$ est le groupe des permutations d'un ensemble à $n$ éléments.*

*Démonstration*: Par naturalité de $H$ on se ramène à l'étude de $H(\{x_1, ..., x_n\})$. On raisonne par récurrence sur $n$, le résultat pour $n = 2$ ayant été démontré dans la preuve du Théorème 3.3. Nous appelons $R$ l'anneau commutatif $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n, x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}]$ et $\mu : R \otimes R \to R$ la multiplication. On a, dans $K_{n+1}(R)$, l'égalité de symboles $\{x_1, ..., x_{n+1}\} = \{x_1, ..., x_n\} * \{x_{n+1}\}$. On identifie $x_i$ à la matrice $[x_i], i \leq n$ et $x_{n+1}$ avec la matrice $\mathrm{inc}^{n-1}([x_{n+1}])$.

D'après la remarque précédent le Corollaire 5.5, on a

$$\begin{aligned} H(\{x_1, ..., x_{n+1}\}) &= H(\{x_1, ..., x_n\} * \{x_{n+1}\}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mu_* \left(sh\left(\mathrm{diag}_1\left([1, X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(1)}X_{\sigma(2)}...X_{\sigma(n)}]\right),\right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left.\mathrm{diag}_2\left([1, x_{n+1}]\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, $\sigma \in \Sigma_n$, notons $\check{X}_i^\sigma = \mathrm{diag}_1(X_{\sigma(1)}...X_{\sigma(i)})$. On trouve

$$H(\{x_1, ..., x_{n+1}\}) = \sum_{\gamma \in \Sigma_{n+1}} \varepsilon(\gamma)[1, X_{\gamma(1)}, X_{\gamma(1)}X_{\gamma(2)}, ..., X_{\gamma(1)}X_{\gamma(2)}...X_{\gamma(n+1)}].$$

On obtient la formule du lemme en composant par $\theta_*$. □

*Démonstration du Théorème 4.1* : On identifie $a_1, ..., a_n$ à des matrices de $GL_1(A)$. Le lemme 4.2 implique que

$$ch_n(\{a_1, ..., a_n\}) = \mathrm{tr}\varphi\Upsilon_n\Big(\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma)[1, A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}, ..., A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}...A_{\sigma(n)}]\Big)$$

où les matrices $A_{\sigma(i)}$ sont définies comme dans le lemme 4.2. Toutes ces matrices étant diagonales, Le raisonnement de la preuve du Théorème 3.3 montre que, pour $\sigma \in \Sigma_n$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\varphi\Upsilon_n([1, A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}, ..., A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}...A_{\sigma(n)}]) = \\ &\qquad\qquad \varphi\Upsilon_n([1, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}...a_{\sigma(n)}]). \end{aligned}$$

(On peut aussi utiliser le corollaire 5.5). Le Théorème 2.6 permet de conclure. □

**4.2. Symboles de Loday.** — On veut ici calculer le caractère de Chern des symboles de Loday $<< b_1, ..., b_n >>$ (définis dans [**19**]) pour $n > 2$.

Si $b_1, ..., b_n$ sont des éléments de $A$ tels que $b_1b_2 = b_2b_3 = ... = b_nb_1 = 0$, notons $R_i$, $i = 1...n$ les matrices élémentaires suivantes

$$R_i = e_{i,i+1}(b_i), \text{ si } 1 \leq i < n \text{ et } R_n = e_{n,1}(b_n).$$

Les matrices $R_i$ commutent deux à deux ce qui permet de définir *le symbole de Loday*

$$<< b_1, ..., b_n >> = \theta_*\{x_1, ..., x_n\}.$$

***Théorème 4.3***. — *Soient $b_1, ..., b_n$, $n \geq 3$, des éléments d'un anneau $A$ tels que $b_1b_2 = b_2b_3 = ... = b_nb_1 = 0$. Alors, dans $\mathcal{B}C_n^-(A)$, le caractère de Chern du symbole de Loday $<< b_1, ..., b_n >>$ est donné par le cycle*

$$\begin{aligned} ch_n(<< b_1, ..., b_n >>) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(n-1)(j-1)}(1, b_j, ..., b_{j-1})u^0 \\ &= B((b_1, ..., b_n))u^0. \end{aligned}$$

*Démonstration*: Comme $<< b_1, ..., b_n >> = \{R_1, ..., R_n\} = \{R_1\} * ... * \{R_n\}$, d'après le Corollaire 5.5, il suffit de calculer, en notant $\times$ pour le produit "shuffle",

$$\mathrm{tr}\varphi\Upsilon_n\left(H(\{R_1\}) \times H(\{R_2\}) \times ... \times H(\{R_n\})\right)$$

En notant $\pi_j^\sigma = R_{\sigma(1)}R_{\sigma(2)}...R_{\sigma(j)}$ $(j = 1...n)$, on déduit du Lemme 4.2

$$H(\{R_1\}) \times H(\{R_2\}) \times ... \times H(\{R_n\}) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)[1, \pi_1^\sigma, \pi_2^\sigma, ..., \pi_n^\sigma].$$

Intéressons-nous d'abord au cas de $i = 0$; on a

$$ch_n^0(<< b_1, ..., b_n >>) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma) \left(\mathrm{tr}((\ (\pi_n^\sigma)^{-1}, R_1^\sigma, R_2^\sigma, ..., R_n^\sigma))\right).$$

On travaille dans $\overline{C}_n(A)$. Rappelons qu'un élément de $A$ est dit trivial s'il appartient à $k$. Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$ et tout $i = (i_0, ..., i_n) \in \{1, ..., n\}^{n+1}$, on doit calculer

$$\mu_i(\sigma) = (((\pi_n^\sigma)^{-1})_{i_0,i_1}, (R_1^\sigma)_{i_1,i_2}, (R_2^\sigma)_{i_2,i_3}, ..., (R_n^\sigma)_{i_n,i_0}).$$

Or, $(R_1^\sigma)_{i_1,i_2}$ est trivial sauf si $i_1 = \sigma(1)$ et $i_2 = \sigma(1) + 1$. Les tenseurs $\mu_i(\sigma)$ non nuls dans $\overline{C}_n(A)$ vérifient donc $i_1 = \sigma(1)$ et $i_2 = \sigma(1) + 1$. Plaçons nous dans ce cas là. Le coefficient $(R_2^\sigma)_{\sigma(1)+1,i_3}$ est trivial à moins que $\sigma(2) = \sigma(1) + 1$ (modulo $n$) et $i_3 = \sigma(2) + 1 = \sigma(1) + 2$ (modulo $n$). En poursuivant le raisonnement, on obtient, pour $0 \leq i \leq n$, que $\mu_i(\sigma)$ est nul dans $\overline{C}_n(A)$ sauf si $\sigma$ est une permutation circulaire et $i_j = \sigma(j)$. Ce qui donne

$$ch_n^0(<< b_1, ..., b_n >>) = \sum_{j=1}^n (-1)^{(n-1)(j-1)}(1, b_j, ..., b_{j-1}).$$

Passons au calcul de $\mathrm{ch}_n^i$, $i \geq 1$. D'après le Théorème 2.6, pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, en notant $\overline{\Gamma}_n^i(\sigma) = \varphi(\Gamma_n^i[1, \pi_1^\sigma, ..., \pi_n^\sigma])$, $\check{\Gamma}_n^i(\sigma) = \varphi(s_{(1)}\Gamma_{n-1}^{i-1}[\pi_1^\sigma, ..., \pi_n^\sigma])$ et $\overline{\nabla}_n^{k,i}(\sigma) = \varphi(\nabla_n^{k,i}[1, \pi_1^\sigma, ..., \pi_n^\sigma])$, on a

$$ch_n^i(<< b_1, ..., b_n >>) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma) \left(\mathrm{tr}\left(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma) + \check{\Gamma}_n^i(\sigma) \sum_{k=1^{i}-1} \overline{\nabla}_n^{k,i}(\sigma)\right)\right).$$

On donne ci-dessous la preuve que $\sum_{i\geq 1} \left(\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma))\right) u^i$ est un bord. Ce résultat se démontre de manière analogue pour les deux autres termes.

Un calcul similaire au cas $i = 0$ donne, en notant $i(n, s) = 1/2(n(2s + 1) - 1)$,

– Si $n = 2m$, $\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma)) = 0$ si $i \neq sm$, et, pour $s \geq 0$,

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^{sm}(\sigma)) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1}(sm)!\,(1, (b_j, ..., b_{j-1})^{1+s}).$$

– Si $n = 2m + 1$, $\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma)) = 0$ si $i \neq sn, 1/2(n(2s + 1) - 1)$, et

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^{sn}(\sigma)) = \sum_{j=1}^n (sn)!\,(1, (b_j, ..., b_{j-1})^{1+2s}),$$

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^{i(n,s)}(\sigma)) = -\sum_{j=1}^n i(n, s)!\,(b_j, ..., b_{j-1})^{2+2s}.$$

Pour $n=2m$, $\sum_{i>0}\left(\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}^i_n(\sigma))\right)u^i$ est le bord

$$(b+B)\left(\sum_{s>0}\frac{(sm)!}{s+1}(b_1,...,b_n)^{s+1}u^{sm-1}\right).$$

On procède de même pour $n=2m+1$. $\square$

*Remarque* : Le calcul du théorème 4.3 s'applique à $ch_2(<< b_1,b_2 >>)$, à part le dernier paragraphe, et redonne la formule du Corollaire 3.5.

Lorsque $A$ est une algèbre commutative contenant $\mathbb{Q}$, il existe des décompositions (appelées *décompositions de Hodge*) de $K_*(A)$ et $HC^-_*(A)$ obtenues à partir d'opérations appelées $\lambda$-*opérations* (*cf.* [**17**] [**2**],[**21**], [**20**]). Les $\lambda$-opérations $(\lambda^k_*)$ sur la $K$-théorie d'un anneau sont induites par le produit extérieur de matrices. Les $\lambda$-opérations $(\widetilde{\lambda}^k_*)$ sur l'homologie cyclique proviennent des opérations extérieures de matrices sur l'algèbre de Lie associée *via* le morphisme de Loday-Quillen ([**21**]). On considère ici les $\lambda$-opérations appelées "vraies" $\lambda$ opérations dans [**20**] chapitre 4.

***Corollaire 4.4***. — *Si $A$ est une algèbre commutative contenant $\mathbb{Q}$, alors, pour tout $k\geq 1$, on a*

$$\widetilde{\lambda}^k_n(ch_n << b_1,...,b_n >>) = k\, ch_n(\lambda^k_n(<< b_1,...,b_n >>)).$$

Ce corollaire a été obtenu en $K$-théorie et homologie cyclique multi-relative par Geller et Weibel dans [**9**].

*Démonstration*: D'après le Théorème 4.3 et [**21**], [**20**]4.6 on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda}^k_n(ch_n(<< b_1,...,b_n >>)) &= \widetilde{\lambda}^k_n(B(b_1,...,b_n))u^0\\ &= kB(\widetilde{\lambda}^k_{n-1}(b_1,...,b_n))u^0\\ &= k\sum_{i=0}^k(-1)^i\binom{n-1+i}{i}\sum_{\sigma\in S'_{n,k}}(-1)^{k-1}\varepsilon(\sigma)(1,b_{\sigma(j)},...,b_{\sigma(j-1)})u^0\end{aligned}$$

où $S'_{n,k}$ est l'ensemble des permutations de $\Sigma_n$ avec $k-1$ descentes et telles que $\sigma(1)=1$. En notant toujours $H$ le morphisme d'Hurewicz, d'après [**2**], on a

$$H(\lambda^k_n << b_1,...,b_n >>) = \bigoplus_{i=0}^k(-1)^i\binom{n-1+i}{i}(\Lambda^{k-i}_{\times,n})_*H(<< b_1,...,b_n >>)$$

où, pour $M\in GL_m(A)$, on note $\Lambda^j_{\times,m}(M)$ la matrice de $\Lambda^jA^m$ définie par

$$\Lambda^j_{\times,m}(M)(v_1\wedge....\wedge v_j) = M(v_1)\wedge....\wedge M(v_j).$$

Les arguments des preuves du Lemme 5.3 de [**21**] et du théorème 4.3 nous donne

$$\begin{aligned}ch_n(\lambda^k_n << b_1,...,b_n >>) &= \sum_{i=0}^k(-1)^i\binom{n-1+i}{i}\\ &\qquad\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\varepsilon(\sigma)tr(\varphi\Upsilon_n[1,E_{\sigma(1)},\dots,R_{\sigma(1)}...R_{\sigma(n)}])\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+k-1} \binom{n-1+i}{i} \sum_{\sigma \in U_{n,k-i}} \varepsilon(\sigma)(1, b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)}) u^0$$

où $U_{n,k-i}$ est l'ensemble des conjugués de $\tau$ (la permutation circulaire standard) ayant $k$ descentes cycliques. La bijection naturelle $U_{n,k-i} \cong S'_{n,k}$ donne la conclusion. $\square$

On obtient comme corollaire du Théorème 4.3 et du Corollaire 4.4 le résultat suivant de Geller et Weibel ([**9**], Théorème 2.3)

***Corollaire 4.5***. — *Soit $A = \oplus_{i \geq 0} A_i$ une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée. Le caractère de Chern $ch_* : K_*(A)/K_*(A_0) \to HC_*^-(A)/HC_*^-(A_0)$ vérifie, pour $n \geq 1$, $\widetilde{\lambda}_n^k \, ch_n = k \; ch_n \, \lambda_n^k$.*

*Démonstration*: Les arguments de Kantorovitz ([**13**]) sont applicables dans ce cadre car $S = 0$ sur $HC_*^-(A)/HC_*^-(A_0)$. La multiplication par un élément de $K_1(\mathbb{Q}[\xi]/(\xi^2))$ ramène alors au cas d'un idéal scindé $I$ de carré nul.

D'après les calculs du paragraphe IV.2 de [**10**], l'image de $B : HC_{n-1}(A, I) \xrightarrow{\cong} HC_n^-(A, I)$ est alors engendrée par des cycles $x = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{nj} (1, x_j, ..., x_{j-1})$ où $x_k \in I$. En particulier $x_k x_{k+1} = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et donc $x = ch_n(<< x_1, ..., x_k >>)$ d'après le Théorème 4.3. Comme $ch_n : K_n(A, I) \to HC_n^-(A, I)$ est un isomorphisme, le corollaire découle immédiatement du Corollaire 4.4. $\square$

*Exemple* : D'après [**9**] on sait que, si $a_1, ..., a_n \in A$ et $a_1 a_2 = ... = a_n a_1 = 0$, alors le symbole généralisé de Dennis et Stein $< a_1, ..., a_n >$ (*cf.* [**19**]) est égal à $\mu_n^{(n)}(-(n-1)! << a_1, ..., a_n >>)$ où $\mu_n^{(n)} : K_n(A) \to K_n^{(n)}(A)$ est la projection sur le dernier facteur de la décomposition de Hodge de $K_n(A)$. En particulier,

$$\begin{aligned} ch_n(< a_1, ..., a_n >) &= ch_n \mu_n^{(n)}(-(n-1)! << a_1, ..., a_n >>) \\ &= -\sum_{\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)(1, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)}) u^0. \end{aligned}$$

On trouvera dans [**9**] une étude très détaillée des symboles de Loday et de leurs décompositions de Hodge.

## 5. Commutation avec le produit

La compatibilité du produit de Loday en $K$-théorie et du produit de Hood-Jones en homologie cyclique *via* le caractère de Chern a été démontrée par McCarthy [**24**] en utilisant la notion de catégorie exacte avec cofibrations. Dans cette partie on donne une démonstration simpliciale, dans l'esprit du papier de Hood et Jones [**11**].

Rappelons la définition du *produit de Loday* en $K$-théorie que l'on note $*$ [**18**]. L'espace $BGL(A)^+$ est muni d'une structure de $H$-espace induit par la somme directe de matrices dont on note $\ominus$ l'inverse (à homotopie près). Le produit tensoriel des matrices induit un morphisme de groupe $\mu_{p,q} : GL_p(A) \times GL_q(A') \to GL(A \otimes A')$. Alors $\widehat{\mu}_{p,q}(x, y) = \mu_{p,q}(x, y) \ominus \mu_{p,q}(x, 1) \ominus \mu_{p,q}(1, y)$ induit une application

$$\widehat{\mu} : BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+ \to BGL(A \otimes A')^+$$

qui induit $*$ sur les groupes d'homotopie.

Si $X_*$, $X'_*$ sont des modules simpliciaux, on pose

$$(X \times X')_* = X_* \otimes X'_* \quad \text{et} \quad (X \otimes X')_* = \bigoplus_{p+q=*} X_p \otimes X'_q.$$

*Le produit de Hood-Jones* [**11**], [**20**] est l'application

$$S^-_\times : \mathcal{B}^-(C(A) \otimes C(A')) \to \mathcal{B}^-(C(A) \times C(A'))$$

définie,pour tout $x = \sum x^i u^i \in \mathcal{B}C^-_p(A)$, $y = \sum y^i u^i \in \mathcal{B}C^-_q(A')$, par :

$$S^-_\times(x,y) = sh(x \times y) + sh'(x \times y)u = \sum_{i \geq 0} \left( \sum_{j=0}^{i} sh(x^j, y^{i-j}) + \sum_{j=0}^{i-1} sh'(x^j, y^{i-1-j}) \right) u^i.$$

On a noté $sh : (X \otimes X')_* \to (X \times X')_*$, $sh' : (C(A) \otimes C(A'))_* \to (C(A) \times C(A'))_{*+2}$ les applications définies par $sh = \sum \varepsilon(\sigma)\sigma$ où la somme est étendue à tous les $(p,q)$-shuffles $\sigma$ tels que $p+q = *$ et $sh'(a,b) = \sum \varepsilon(\sigma)\sigma(s(a), s(b))$ où la somme est étendue à tous les $(p,q)$-shuffles cycliques tels que $p+q = *$, *cf.* [**20**] chapitre 4.

***Théorème 5.1***. — *Le caractère de Chern commute avec le produit de Loday en K-théorie et le produit de Hood-Jones en homologie cyclique. Précisément, si $A, A'$ sont deux k-algèbres, $p, q \geq 1$ et $(x,y) \in K_p(A) \times K_q(A')$, alors*

$$ch_{p+q}(x * y) = S^-_\times(ch_p(x), ch_q(y)).$$

Pour démontrer ce théorème, on construit, pour $G$, $G'$ deux groupes, un analogue

$$S^-_\times : \mathcal{B}^-_*(C_*(G) \otimes C_*(G')) \to \mathcal{B}^-_*(C_*(G) \times C_*(G'))$$

du produit $S^-_\times$ et on prouve qu'il commute avec $\Upsilon_*$.

***Définition 5.2***. — *On note $\check{sh}'$ l'application définie, pour tout $p, q \geq 0$ par*

$$\check{sh}' = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \sum_{\sigma \in \Sigma(i,j)} \varepsilon(\sigma)\sigma(l(t^i x), l(t^j y))$$

*où $x \in C_p(G), y \in C_q(G')$ et $\Sigma(i,j)$ est l'ensemble des $(p+1, q+1)$-shuffles tels que $\sigma(1+i) < \sigma(p+2+j)$.*

***Lemme 5.3***. — *Soit $\check{S}^-_\times : HC^-_p(G) \otimes HC^-_q(G') \to HC^-_{p+q}(C_*(G) \times C_*(G'))$ l'application $\check{S}^-_\times = sh + \check{sh}'u$.*

- **i) :** *On a $\varphi(\check{S}^-_\times) = S^-_\times(\varphi \otimes \varphi)$,*
- **ii) :** *L'application $\check{S}^-_\times$ induit un produit associatif $HC^-_p(G) \otimes HC^-_q(G') \to HC^-_{p+q}(C_*(G) \times C_*(G'))$.*
- **iii) :** *On a $[b, sh] = 0, \quad [B, \check{sh}'] = 0, \quad [B, sh] + [b, \check{sh}'] = 0.$*

*Démonstration*: Le $i)$ est un calcul immédiat et $ii)$ et $iii)$ en découle en remarquant que le produit sur $\mathcal{B}^-(NG \otimes NG')_*$ s'obtient par restriction du produit de Hood-Jones associé aux algèbres de groupes $k[G]$ et $k[G']$. $\square$

***Lemme 5.4.*** — *Dans $HC^-_{p+q}(G\times G')$, on a $\check{S}^-_\times(\Upsilon_p\otimes\Upsilon_q)=\Upsilon_{p+q}(sh)$.*

*Démonstration*: Soit pour $n\geq 0$, $\gamma_n:(C_*(G)\otimes C_*(G'))_n\to\mathcal{B}^-_n(C_*(G)\times C_*(G'))$ défini, pour $p+q=n$, par $\gamma_n=\Upsilon_n(sh)-\check{S}^-_\times(\Upsilon_p\otimes\Upsilon_q)$. On va montrer que $\gamma_*$ est homotope à 0. On pose $\gamma_n=\sum\gamma^i_n u^i$. On cherche donc une famille $(\theta_n)_{n\geq 0}$ d'applications $G$-linéaires telles que pour tout $n,i\geq 0$ on ait

$$\gamma^i_n=b\theta^i_n+B\theta^{i-1}_n+\theta^i_{n-1}b. \qquad (1)^i_n$$

Dans le complexe normalisé, on a $\gamma_0(x,y)=\Upsilon_0(sh(x,y))-\check{S}^-_\times(\Upsilon_0(x)\otimes\Upsilon_0(y))=0$.

De même $\gamma_n(x,y)=0$ si $y\in C_0(G')$. On va raisonner de la même façon que dans le théorème 2.5. Posons $\theta^0_n=0=\theta^{-1}_n$ et $\theta_0=0$. On définit, pour $i\geq 1,n\geq 1$,

$$\theta^i_n=s_{\mathrm{id}}(\gamma^i_n-B\theta^{i-1}_n-\theta^i_{n-1}b).$$

Les $\theta^i_n$ sont bien $G$-linéaires par récurrence sur $n$. La famille $(\theta^i_n)$ vérifie $(1)^i_n$ pour $n=0$ ou $i=0$. Supposons que les égalités $(1)^*_m$ sont satisfaites pour tout $0\leq m$. Montrons par récurence sur $i$ que les égalités $(1)^i_{n+1}$ sont satisfaites pour tout $i\geq 0$. On connait le résultat pour $i=0$. Supposons donc, que les égalités $(1)^j_{n+1}$ sont satisfaites pour $0\leq j\leq i$. On a

$$b\theta^{i+1}_{n+1}=\gamma^{i+1}_{n+1}-B\theta^i_{n+1}-\theta^{i+1}_n b-s_{id}b(\gamma^{i+1}_{n+1}-B\theta^i_{n+1}-\theta^{i+1}_n b). \qquad (2^i_n)$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence et la relation $[B,sh]+[b,\check{sh}']=0$ du Lemme 5.3 on trouve que $b(\gamma^{i+1}_{n+1}-B\theta^i_{n+1}-\theta^{i+1}_n b)=0$ et $(1)^{i+1}_{n+1}$ est vérifiée. □

*Démonstration du Théorème 5.1* : Il est bien connu (*cf.* par exemple [**8**]) qu'en posant $h(x,y)=x\otimes y\ominus x\otimes 1\ominus 1\otimes y$, on obtient, par fonctorialité, que $H(x*y)=h_*(sh(H(x),H(y))$.

Le théorème découle de la commutativité du diagramme suivant (où l'on a posé $G=GL(A)$, $G'=GL(A')$, $\mathcal{M}=\mathcal{M}(A)$ et $\mathcal{M}'=\mathcal{M}'(A)$) :

$$\begin{tikzcd}
K_p(A)\otimes K_q(A') \arrow[r, "*"] \arrow[d, "H\otimes H"'] & K_{p+q}(A\otimes A') \arrow[dr, "H"] & \\
H_p(G)\otimes H_q(G') \arrow[r, "sh"] \arrow[d, "\Upsilon_p\otimes\Upsilon_q"'] & H_{p+q}(G\times G') \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "\Upsilon_{p+q}"'] & H_{p+q}(GL(A\otimes A')) \arrow[d, "\Upsilon_{p+q}"'] \\
HC^-_p(G)\otimes HC^-_q(G') \arrow[r, "\check{S}^-_\times"] \arrow[d, "\varphi\otimes\varphi"'] & HC^-_{p+q}(G\times G') \arrow[d, "\varphi"'] & HC^-_{p+q}(GL(A\otimes A')) \arrow[d, "\varphi"'] \\
HC^-_p(\mathcal{M})\otimes HC^-_q(\mathcal{M}') \arrow[r, "S^-_\times"] \arrow[d, "\mathrm{tr}\otimes\mathrm{tr}"'] & HC^-_{p+q}(\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}') \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & HC^-_{p+q}(\mathcal{M}(A\otimes A')) \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] \\
HC^-_p(A)\otimes HC^-_q(A') \arrow[r, "S^-_\times"] & HC^-_{p+q}(A\otimes A') \arrow[r, "\mathrm{id}"] & HC^-_{p+q}(A\otimes A').
\end{tikzcd}$$

D'après les Lemmes 5.3, 5.4 et le début de la démonstration, il suffit de démontrer que $\mathrm{tr}\varphi\Upsilon_{p+q}h_* = \mathrm{tr}\varphi\Upsilon_{p+q}$. Mais $\mathrm{tr}\varphi((x\otimes 1)_* \oplus (1\otimes y)_*) = 0$ si $p,q \geq 1$ car $\mathrm{tr}1_{GL(A)}\mathrm{tr}1_{GL(A')} = 0$ dans le complexe normalisé. □

*Remarque* : Le diagramme commutatif de la preuve du Théorème 5.1 implique le corollaire suivant où l'on définit $\check{C}h_{p,q} : H_p(GL(A))\otimes H_q(GL(A')) \to HC^-_{p+q}(A\otimes A')$ comme la composée suivante

$$H_p(G)\otimes H_q(G') \xrightarrow{sh} H_{p+q}(GL(A\otimes A')) \xrightarrow{\Upsilon_{p+q}} HC^-_{p+q}(GL(A\otimes A')) \xrightarrow{\mathrm{tr}\circ\varphi} HC^-_{p+q}(A\otimes A').$$

***Corollaire 5.5***. — *Soit $x\in K_p(A)$, $y\in K_q(A')$. Le caractère de Chern $ch_{p+q}(x*y)$ est égal à $\check{C}h_{p,q}(H(x),H(y))$*

En particulier, si $x\in Prim(H_p(GL_m(A))\subset K_p(A)$ et $y\in Prim(H_q(GL_m(A'))\subset K_q(A')$, alors $H(x*y)\in H_{p+q}(GL_{3m}(A\otimes A'))$ et, pour calculer $ch_{p+q}(x*y)$, il suffit de calculer $\check{\mathrm{tr}}\varphi\Upsilon_{p+q}H(x*y)$ où

$$\check{\mathrm{tr}}(M^0,\dots,M^n) = \sum_{i_0,\dots,i_n=1}^{m} ((M^0)_{i_0,i_1},\dots,(M^n)_{i_n,i_0}).$$

## Références


[1] Brown, Kenneth S., *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, 87. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[2] Cathelineau, Jean-Louis, *$\lambda$-structures in algebraic $K$-theory and cyclic homology*, $K$-Theory 4 (1990/91), no. 6, 591–606.

[3] Connes, Alain, *Noncommutative differential geometry, I, II*, Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. 62 (1985), 41–144.

[4] Dennis, R. Keith, *Differentials in algebraic $K$-theory*, non publié, circa 1975.

[5] Dennis, R. Keith, *Algebraic $K$-theory and Hochschild homology*, non publié, 1975-1976.

[6] Dennis, R. Keith; Stein, Michael R., *$K_2$ of discrete valuation rings*, Advances in Math. 18 (1975), no. 2, 182–238

[7] Fox, Ralph H.,*Free differential calculus. I, Derivation in the free group ring.* Ann. of Math. (2) 57, (1953), 547–560.

[8] Gaucher, Philippe, *Produit tensoriel de matrices, homologie cyclique, homologie des algèbres de Lie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 44 (1994), no. 2, 413–431.

[9] Geller, Susan C.; Weibel, Charles A., *Hodge decompositions of Loday symbols in $K$-theory and cyclic homology*, $K$-Theory 8 (1994), no. 6, 587–632

[10] Goodwillie, Thomas G., *Relative algebraic $K$-theory and cyclic homology*, Ann. of Math. (2) 124 (1986), no. 2, 347–402

[11] Hood, Christine E.; Jones, John D. S., *Some algebraic properties of cyclic homology groups*, $K$-Theory 1 (1987), no. 4, 361–384.

[12] J. D. S. Jones, *Cyclic homology and equivariant homology*, Invent. Math. 87 (1987), 403–424.

[13] Kantorovitz, Myriam R. *Adams operations and the Dennis trace map.* J. Pure Appl. Algebra 144 (1999), no. 1, 21–27.

[14] Karoubi, Max, *Homologie cyclique et $K$-théorie*, Astérisque 149, Soc. Math. France, Paris (1987).

[15] Kassel, Christian *Cyclic homology, comodules, and mixed complexes*, J. Algebra 107 (1987), no. 1, 195–216.

[16] Kassel, Christian, *Homologie cyclique, caractère de Chern et lemme de perturbation*, J. Reine Angew. Math. 408 (1990), 159–180

[17] Kratzer, Ch. *$\lambda$-structure en $K$-théorie algébrique.* Comment. Math. Helv. 55 (1980), no. 2, 233–254

[18] Loday, Jean-Louis, *$K$-théorie algébrique et représentations de groupes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 9 (1976), no. 3, 309–377. 1, 178–202.

[19] Loday, Jean-Louis, *Symboles en $K$-théorie algébrique supérieure*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981), no. 18, 863–866.

[20] Loday, Jean-Louis, *Cyclic homology*, 2ème édition, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[21] Loday, J.-L.; Procesi, C., *Cyclic homology and lambda operations*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 279, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1989), 209–224.

[22] Loday, Jean-Louis; Quillen, Daniel, *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helv. 59 (1984), no. 4, 569–591.

[23] Maazen, Hendrik; Stienstra, Jan, *A presentation for $K_2$ of split radical pairs*, J. Pure Appl. Algebra 10 (1977/78), no. 3, 271–294.

[24] McCarthy, Randy, *The cyclic homology of an exact category*, J. Pure Appl. Algebra 93 (1994), no. 3, 251–296.

[25] Milnor, John, *Introduction to algebraic $K$-theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 72. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971

[26] Mulders, Thom, *Generating the tame and wild kernels by Dennis-Stein symbols*, $K$-Theory 5 (1991/92), no. 5, 449–470

[27] Soulé, C., *Eléments cyclotomiques en $K$-théorie*, Astérisque 147-148, Soc. Math. France (1987)

[28] Tsygan, B. L., *Homology of matrix algebras over rings and Hochschild homology*, Uspekhi Mat. Nauk 38 (1983), 217–218 ( = Russ. Math. Surveys 38 (1983), 198–199).

[29] Weibel, Charles A., *Nil $K$-theory maps to cyclic homology*, Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), no. 2, 541–558

[30] Weibel, Charles A., *An introduction to algebraic $K$-theory*, http://math.rutgers.edu:80/~weibel/Kbook.html

Grégory Ginot, CMLA – LAGA, ENS Cachan-Université Paris 13, 61, av. du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France • *E-mail :* `ginot@cmla.ens-cachan.fr`