

# Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber

Grégory Ginot

## Résumé

On étudie ici les notions d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près et d'homologie des algèbres de Gerstenhaber du point de vue de la théorie des opérades. Précisément, on donne une description explicite des  $\mathcal{G}$ -algèbres à homotopie près (c'est-à-dire d'algèbres sur le modèle minimal de l'opérade  $\mathcal{G}$  des algèbres de Gerstenhaber). On décrit également le complexe calculant l'homologie des  $\mathcal{G}$ -algèbres. On donne une suite spectrale qui converge vers cette homologie et quelques exemples de calculs. Enfin on explicite la structure d'algèbre de Poisson à homotopie près.

La notion d'algèbre de Gerstenhaber (notée aussi  $\mathcal{G}$ -algèbre) a été introduite par Murray Gerstenhaber [5] en 1963. Précisément, Gerstenhaber a montré que la cohomologie de Hochschild  $HH^*(A)$  de toute algèbre associative  $A$  peut être munie d'un cup-produit de degré 0 et d'un crochet de degré -1. Le cup-produit est associatif et commutatif et le crochet munit la suspension de  $HH^*(A)$  d'une structure d'algèbre de Lie (graduée). De plus, le crochet est une dérivation pour le produit.

Ce type de structure apparaît aussi fréquemment en physique et en géométrie différentielle. Par exemple, l'espace gradué des multi-champs de vecteurs sur une variété différentiable  $M$ , muni du crochet de Schouten-Nijenhuis, est une algèbre de Gerstenhaber.

Il existe aussi une interprétation topologique. Une des opérades topologiques les plus étudiées est l'opérade des petits disques  $\mathcal{D}$ . Précisément,  $\mathcal{D}(n)$  est l'espace des configurations de  $n$  petits disques à l'intérieur du disque unité du plan. La composition est induite par contraction et insertion de telles configurations dans les petits disques. La structure d'une algèbre de Gerstenhaber est décrite par une certaine opérade  $\mathcal{G}$ . Cohen [1] a montré que l'opérade  $\mathcal{G}$  est isomorphe à l'homologie de l'opérade  $\mathcal{D}$ .

L'intérêt pour l'étude de  $\mathcal{G}$ -algèbres à homotopie près (notée aussi  $\mathcal{G}_\infty$ -algèbres) a grandi après que Deligne [2] a conjecturé que l'isomorphisme

précédent se relevait au niveau des chaînes, c'est-à-dire qu'il existait une structure de  $\mathcal{D}$ -algèbre sur le complexe de cochaînes de Hochschild  $C^*(A, A)$ . D'un point de vue algébrique cette conjecture implique qu'il existe une structure naturelle de  $\mathcal{G}_\infty$ -algèbre sur  $C^*(A, A)$  (en caractéristique 0). En fait une telle structure est l'analogie en géométrie non commutative de la  $\mathcal{G}$ -structure sur les multi-champs de vecteur d'une variété.

Différentes réponses à cette conjecture (utilisant différentes notions de  $\mathcal{G}$ -algèbre à homotopie près) ont été apportées notamment par [7], [21], [19]. Kontsevich et Soibelman ont démontré une généralisation de cette conjecture [11], [12]. En 1998, Tamarkin [19] a donné une nouvelle preuve du théorème de formalité de Kontsevich en utilisant (et démontrant) l'existence d'une structure de  $\mathcal{G}$ -algèbre à homotopie près sur  $C^*(A, A)$ .

Étant donnée une « structure algébrique »  $\mathcal{P}$ , *i.e.* une opérade  $\mathcal{P}$ , la notion la plus canonique de  $\mathcal{P}$ -algèbre à homotopie près est celle d'algèbre sur le modèle minimal de  $\mathcal{P}$  *cf.* [8], [16], [14]. Le modèle minimal d'une opérade  $\mathcal{P}$  consiste en une opérade graduée libre munie d'une différentielle et d'un quasi-isomorphisme avec  $\mathcal{P}$ . Lorsque  $\mathcal{P}$  est de Koszul, d'après Ginzburg et Kapranov [8], son modèle minimal (noté  $\mathcal{P}_\infty$ ) est donné par la bar construction de  $\mathcal{P}$ . Il est à noter que dans une telle structure à homotopie près les conditions de symétrie des opérations (commutativité du produit d'une algèbre commutative, antisymétrie du crochet de Lie par exemple) restent strictes.

Curieusement, les définitions explicites de  $\mathcal{G}$ -algèbres à homotopie près introduites pour répondre à la conjecture de Deligne n'ont pas été décrites en tant qu'algèbres sur le modèle minimal de  $\mathcal{G}$ . Le premier objectif de cet article est de donner une description explicite de la structure d'une  $\mathcal{G}_\infty$ -algèbre à partir du modèle minimal de  $\mathcal{G}$ . Il est implicite que la définition de Tamarkin et Tsygan [20] correspond à celle donnée par le modèle minimal de  $\mathcal{G}$ , mais uniquement dans le cas d'algèbres de dimension finie et, de plus, certaines relations ne sont pas explicitées. Dans [19], Tamarkin a montré que le complexe de cochaînes de Hochschild  $C^*(A, A)$  admet une structure d'algèbre sur le modèle minimal de  $\mathcal{G}$  répondant ainsi positivement à la version algébrique de la conjecture de Deligne. Cependant les opérations définissant cette structure ne sont pas explicites. En particulier, dans cette construction, le cup-produit classique (associatif et non commutatif) sur  $C^*(A, A)$  est remplacé par un produit strictement commutatif et associatif à homotopie près (et homotope au cup-produit). Les liens avec la version topologique de cette conjecture sont donnés par Voronov [21].

Dans [8], Ginzburg et Kapranov ont donné un moyen de construire explicitement un complexe  $(C_*^{\mathcal{P}}(A), d)$  associé à toute  $\mathcal{P}$ -algèbre  $A$ . Ce complexe est tel que la nullité de la composée

$$C_3^{\mathcal{P}}(A) \xrightarrow{d} C_2^{\mathcal{P}}(A) \xrightarrow{d} C_1^{\mathcal{P}}(A)$$

se déduit des relations décrivant la structure des  $\mathcal{P}$ -algèbres. Dans le cas des algèbres associatives, commutatives et de Lie, on retrouve les complexes standard de Hochschild, de Harrison et de Chevalley-Eilenberg respectivement. Plus généralement, le complexe donné par Ginzburg et Kapranov calcule l'homologie de Quillen associée aux  $\mathcal{P}$ -algèbres. En fait certains calculs de Tamarkin [19] s'interprètent facilement comme des calculs en homologie des algèbres de Gerstenhaber.

Le deuxième objectif de cet article est de décrire l'homologie opéradique des  $\mathcal{G}$ -algèbres (appelée par la suite homologie de Gerstenhaber). On décrit le complexe et la différentielle calculant l'homologie de Gerstenhaber  $H\mathcal{G}_*(A)$  d'une  $\mathcal{G}$ -algèbre  $A$ . Ce complexe est en fait un bicomplexe et on en déduit une suite spectrale convergeant vers  $H\mathcal{G}_*(A)$  dans l'esprit de [15]. En utilisant la suite spectrale précédente, on calcule également  $H\mathcal{G}_*(A)$  lorsque  $A$  est une algèbre de Gerstenhaber libre, une algèbre de Gerstenhaber libre sur une algèbre de Lie, ou une  $\mathcal{G}$ -algèbre dont l'une des opérations est triviale.

On peut effectuer les mêmes calculs dans le cadre des algèbres de Poisson (ou plus généralement des  $n$ -algèbres). Le dernier objectif de cet article est de donner une description explicite de la structure d'algèbre de Poisson à homotopie près.

Le paragraphe 1 est constitué de rappels sur la théorie des opérades. Dans le paragraphe 2 on rappelle la définition des algèbres de Gerstenhaber et de l'opérade  $\mathcal{G}$  qui les décrit et on donne la structure des  $\mathcal{G}$ -algèbres libres. On décrit les algèbres de Gerstenhaber à homotopie près dans le paragraphe 3. Le complexe calculant l'homologie des  $\mathcal{G}$ -algèbres est explicité au paragraphe 4 ainsi qu'une suite spectrale  $E_{*,*}^2 = H_q(\bigwedge_* \text{Harr}(A)^p[1], d_\ell)$  convergeant vers  $H\mathcal{G}(A)$  pour toute  $\mathcal{G}$ -algèbre  $A$ . Dans le paragraphe 5, on illustre les résultats des paragraphes précédents en donnant une preuve élémentaire de la koszulité de l'opérade  $\mathcal{G}$  (un théorème de Markl [15] et Getzler-Jones [7]), en montrant que  $H\mathcal{G}_*(A) = H_*^{\text{Lie}}(\mathfrak{g})$  (l'homologie de Cartan-Eilenberg de  $\mathfrak{g}$  à coefficient trivial) si  $A$  est l'algèbre de Gerstenhaber libre sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et en calculant l'homologie de Gerstenhaber des algèbres de Gerstenhaber ayant une opération triviale. Enfin, dans le paragraphe 6, on applique les méthodes du paragraphe 3 au cas des algèbres de Poisson.

Je tiens à remercier Gilles Halbout, Jean-Louis Loday et Mathieu Zimmermann sans qui le groupe de travail de Strasbourg sur les opérades n'aurait pas été aussi stimulant et Pierre Cartier pour ses précieux commentaires.

**Notations :** Dans toute la suite  $k$  sera un corps de caractéristique zéro et  $\mathbb{Q}$  le corps des nombres rationnels. On notera  $S_n$  le groupe symétrique sur  $n$  lettres ( $n \geq 1$ ) et  $\check{k}$  sera le  $k$ -espace vectoriel de dimension 1 muni, pour tout  $n \geq 1$ , de la représentation signature de  $S_n$ . On munit également  $k$  de la représentation triviale de  $S_n$ .

Pour  $V$  un espace vectoriel gradué (ou un complexe) et  $n \in \mathbb{Z}$  on notera  $V[n]$  le  $k$ -espace vectoriel gradué (complexe)  $V[n] = k[n] \otimes V$  où  $k[n]$  est le  $k$ -espace vectoriel gradué de dimension 1 concentré en degré  $-n$ . Si  $x \in V$ , on notera  $s^n x$  l'élément correspondant dans  $V[n]$  de degré  $|x| - n$ .

## 1 Rappels sur les opérades

### 1.1 Définitions générales

Un  $S$ -module  $M$  est la donnée d'une famille  $(M(1), M(2), \dots, M(n), \dots)$  de  $k$ -espaces vectoriels (gradués) telle que chaque  $M(n)$  ( $n \geq 1$ ) soit muni d'une structure de  $S_n$ -module à gauche. Si  $V$  est un espace vectoriel (gradué), l'espace  $V^{\otimes n}$  est muni d'une action à droite de  $S_n$  par permutation (avec la convention de signe de Koszul-Quillen). En particulier, pour  $x_1, \dots, x_n \in V$  et  $\sigma \in S_n$ , on notera  $\varepsilon(\sigma)$  (on sous-entend la dépendance par rapport à  $x_1, \dots, x_n$ ) le signe défini par

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)^\sigma = \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

On notera également  $\text{sg}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)\varepsilon(\sigma)$ . Plus généralement, soient  $V_1, \dots, V_n$  des espaces vectoriels gradués et  $x_i \in V_i[p_i]$  ( $i = 1 \dots n$ ); on notera  $\varepsilon'(\sigma)$  le signe défini par

$$(s^{p_1} x_1 \otimes \dots \otimes s^{p_n} x_n)^\sigma = \varepsilon'(\sigma) s^{p_{\sigma(1)}} x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes s^{p_{\sigma(n)}} x_{\sigma(n)}$$

et  $\text{sg}'(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)\varepsilon'(\sigma)$ . On notera aussi  $|x_i|' = |x| - p_i$ .

On associe à un  $S$ -module un foncteur (dit *foncteur de Schur*)  $S(M, \square) : \text{Vect} \rightarrow \text{Vect}$  (où  $\text{Vect}$  est la catégorie des espaces vectoriels) défini par

$$S(M, V) = \bigoplus_{n \geq 1} M(n) \otimes_{S_n} V^{\otimes n}.$$

On notera dans la suite simplement  $M(V)$  l'espace vectoriel  $S(M, V)$ . Si  $M$  et  $N$  sont deux  $S$ -modules, on définit le  $S$ -module composé  $M \circ N$  de telle sorte que le foncteur de Schur associé soit la composée des foncteurs de Schur de  $M$  et  $N$ . Précisément, on a

$$(M \circ N)(m) = \bigoplus_{n \geq 1} M(n) \otimes_{S_n} \left( \bigoplus_{p_1 + \dots + p_n = m} \text{Ind}_{S_{p_1} \times \dots \times S_{p_n}}^{S_{p_1 + \dots + p_n}} N(p_1) \otimes \dots \otimes N(p_n) \right).$$

Une opérade (cf. [17], [8]) est la donnée d'un  $S$ -module  $\mathcal{P}$  et de transformations de foncteurs  $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $\eta : (k, 0, \dots) \rightarrow \mathcal{P}$  satisfaisant des axiomes d'associativité et d'unité ([8]). Une telle structure est en fait déterminée par des applications linéaires (compatibles avec les actions des groupes symétriques)

$$\gamma_{n, p_1, \dots, p_n} : \mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} \mathcal{P}(p_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(p_n) \longrightarrow \mathcal{P}(p_1 + \dots + p_n)$$

appelées compositions.

Une algèbre sur une opérade  $\mathcal{P}$  (cf. [7], [8]) est la donnée d'un espace vectoriel  $A$  et d'une application  $\rho : \mathcal{P}(A) \rightarrow A$ , compatible avec l'inclusion de  $A$  dans  $\mathcal{P}(A)$  (donnée par  $\eta$ ), telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} \circ \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{P}(A) \\ \mathcal{P}(\rho) \downarrow & & \downarrow \rho \\ \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\rho} & A. \end{array}$$

Une structure de  $\mathcal{P}$ -algèbre est donc donnée par des applications

$$\rho_n : \mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} A^{\otimes n} \rightarrow A.$$

Si  $V$  est un espace vectoriel, alors l'espace vectoriel  $\mathcal{P}(V)$  est naturellement muni d'une structure de  $\mathcal{P}$ -algèbre via  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(V)) \xrightarrow{\gamma(V)} \mathcal{P}(V)$ . Une telle  $\mathcal{P}$ -algèbre est appelée  *$\mathcal{P}$ -algèbre libre*. Ces algèbres sont caractérisées par la propriété universelle suivante: pour toute  $\mathcal{P}$ -algèbre  $A$  et toute application linéaire  $V \xrightarrow{\varphi} A$ , il existe une unique application  $\psi : \mathcal{P}(V) \rightarrow A$  qui fasse commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\eta(V)} & \mathcal{P}(V) \\
 \searrow \varphi & & \swarrow \psi \\
 & A & .
 \end{array}$$

Toutes les notions présentées ici admettent des notions duales évidentes (cf. [7]). En particulier on a les notions de coopérides, coalgèbres sur une coopéride et coalgèbres colibres.

Suivant Tamarkin ([19]), quand  $M$  est un  $S$ -module, on note  $M_m$  le  $S$ -module défini par  $M_m(n) = M(n) \otimes \check{k}^{\otimes |m|}[m(n-1)]$  de telle sorte que, si  $\mathcal{P}$  est une opéride, une structure de  $\mathcal{P}_m$ -algèbre sur  $A$  est équivalente à une structure de  $\mathcal{P}$ -algèbre sur  $A[m]$ .

## 1.2 Présentation d'une opéride

Le foncteur oublié  $U : \text{Oper} \rightarrow S\text{-mod}$  de la catégorie des opérides vers la catégorie des  $S$ -modules admet un adjoint à gauche  $F : S\text{-mod} \rightarrow \text{Oper}$ . Une opéride de la forme  $F(M)$  est *libre*. Elle est munie d'un morphisme de  $S$ -modules  $i : M \rightarrow F(M)$  tel que, pour tout morphisme de  $S$ -modules  $M \xrightarrow{\varphi} \mathcal{P}$  (avec  $\mathcal{P}$  une opéride), il existe un unique morphisme d'opérides  $F(M) \xrightarrow{\psi} \mathcal{P}$  tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{i} & F(M) \\
 \searrow \varphi & & \swarrow \psi \\
 & \mathcal{P} &
 \end{array}$$

Une description du foncteur  $F$  en terme d'arbres est donnée dans [8], [7] par exemple.

Soient  $M$  un  $S$ -module et  $R$  un sous  $S$ -module de  $F(M)$ . Un idéal  $\mathcal{R}$  de  $F(M)$  est un sous  $S$ -module de  $F(M)$  tel que  $\gamma(\mathcal{R} \circ F(M))$  et  $\gamma(F(M) \circ \mathcal{R})$  soient inclus dans  $\mathcal{R}$  (en particulier  $\gamma$  se restreint au  $S$ -module quotient  $F(M)/\mathcal{R} = (F(M)(1)/\mathcal{R}(1), \dots)$ ). Si  $\mathcal{R}$  est l'idéal engendré par  $R$  (c'est-à-dire le plus petit idéal de  $F(M)$  contenant  $R$ ), on note  $\mathcal{O}p(M, R)$  l'opéride quotient de  $F(M)$  par  $\mathcal{R}$ . L'opéride  $\mathcal{O}p(M, R)$  est dite *présentée* par les générateurs  $M$  et les relations  $R$ .

Une opérade  $\mathcal{O}p(M, R)$  est dite *binnaire* si  $M$  est concentré en degré 2 *i.e.*  $M = (0, M(2), 0, \dots)$ . Une opérade  $\mathcal{O}p(M, R)$  est dite *quadratique* si  $R$  est inclus dans  $FM(3)$ . Dans toute la suite on ne s'intéressera qu'à des opérades binnaires quadratiques.

Dualement on a une notion de coprésentation d'une coopérade.

Si  $\mathcal{P} = \mathcal{O}p(M, R)$  est une opérade binnaire quadratique, la coopérade duale  $\mathcal{P}^\perp$  (*cf.* [7]) de  $\mathcal{P}$  est la coopérade  $co\mathcal{O}p(M[1], R^\perp[2])$  où  $R^\perp = F(M)(3)/R$ . Si  $\mathcal{C}$  est la coopérade  $\mathcal{C} = co\mathcal{O}p(N, Q)$ , on définit l'opérade duale  $\mathcal{C}^\perp = \mathcal{O}p(N[-1], Q^\perp[-2])$ . On vérifie facilement que  $(\mathcal{P}^\perp)^\perp = \mathcal{P}$  et que  $(\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}$ .

### 1.3 Koszulté d'une opérade

Soit  $\mathcal{P} = \mathcal{O}p(M, R)$  une opérade binnaire quadratique et  $V$  un espace vectoriel. D'après [8], [7] l'espace vectoriel  $\mathcal{P}^\perp(\mathcal{P}(V))$  peut être muni de manière naturelle d'une structure de complexe. La différentielle est donnée par l'application

$$d_\alpha : \mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P} \xrightarrow{1 \otimes \alpha \otimes 1} \mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P}$$

où  $\alpha$  est la composée  $\mathcal{P}^\perp \rightarrow \mathcal{P}^\perp(2) \cong \mathcal{P}(2)[1] \hookrightarrow \mathcal{P}[1]$ . On dit qu'une opérade binnaire quadratique est *de Koszul* si  $(\mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P}, d_\alpha)$  est quasi-isomorphe à  $(k, 0, \dots)$ .

Il existe une résolution quasi-libre d'une opérade de Koszul, la construction bar (*cf.* [7]): si  $\mathcal{C}$  est une coopérade coaugmentée, la construction bar de  $\mathcal{C}$  est l'opérade  $co\mathcal{B}(\mathcal{C}) = F(\overline{\mathcal{C}}[-1])$ . On la munit d'une différentielle  $d_{\mathcal{B}}$  définie comme l'unique différentielle qui prolonge la co-composition de  $\mathcal{C}$ . Cette différentielle est compatible avec les éventuelles différentielles  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Lorsque  $\mathcal{C} = \mathcal{P}^\perp$ , on a une application canonique  $co\mathcal{B}(\mathcal{P}^\perp) \rightarrow \mathcal{P}$ . Il est bien connu que cette application est un quasi-isomorphisme si et seulement si  $\mathcal{P}$  est de Koszul.

*Exemple:* L'opérade Ass des algèbres associatives est engendré par  $mk[S_2]$  et la relation  $m(m, 1) = m(1, m)$ . Cette opérade est « auto-duale », c'est-à-dire que  $Ass^\perp = (Ass_{\perp 1})^*$  où  $*$  désigne le dual linéaire. Il est bien connu que Ass est une opérade de Koszul.

L'opérade des algèbres commutatives est l'opérade

$$Com = \mathcal{O}p(mk, m(m, 1) - m(1, m))$$

et l'opérade des algèbres de Lie est l'opérade

$$\text{Lie} = \mathcal{O}p(\check{\ell}k, R_{\text{Lie}}).$$

où  $R_{\text{Lie}}$  est la relation de Jacobi. Ces opérades sont « duales » l'une de l'autre:  $\text{Com}^\perp = (\text{Lie}_{\perp 1})^*$  et  $\text{Lie}^\perp = (\text{Com}_{\perp 1})^*$  et elles sont de Koszul.

## 2 L'opérade des algèbres de Gerstenhaber

Une algèbre de Gerstenhaber est un espace vectoriel  $\mathbb{Z}$ -gradué  $A$  muni d'une multiplication commutative et associative  $m : A \otimes A \rightarrow A$  de degré 0 et d'un crochet  $[\ ; \ ] : A \otimes A \rightarrow A$  de degré  $-1$  tel que  $(A[1], [\ ; \ ])$  soit une algèbre de Lie (graduée) et que, pour tout  $x$  homogène, l'application  $[x; \ ]$  soit une dérivation (graduée) pour la multiplication  $m$ .

Une algèbre de Gerstenhaber est déterminée par la donnée de deux opérations binaires vérifiant des relations quadratiques où chaque variable n'apparaît qu'une seule fois. Ainsi, il existe une opérade dont les algèbres sont exactement les algèbres de Gerstenhaber. Rappelons que, pour une opérade binaire  $\mathcal{O}p(M, R)$ , le  $S_3$ -module  $F(M)(3) = \text{Ind}_{S_2}^{S_3} M(2) \otimes M(2)$  où  $S_2$  agit sur le deuxième facteur  $M(2)$ . Si  $m_1$  et  $m_2$  sont des opérations de  $M(2)$ , on note  $m_1(m_2, 1)$  l'élément  $m_1 \otimes m_2 \in F(M)(3)$ . On note  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  la base canonique de la représentation standard  $\text{Ind}_{S_2}^{S_3} k$  et on identifie  $\underline{x}, \underline{y}$  et  $\underline{z}$  avec respectivement l'identité de  $S_3$ , la permutation circulaire standard  $\tau = (123)$  et  $\tau^2$ . Rappelons aussi que l'on a muni  $k$  d'une structure de  $S_2$ -module trivial.

**Lemme 2.1:** *L'opérade des algèbres de Gerstenhaber est l'opérade*

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}p(\ell k[1] \oplus mk, R)$$

où  $R = R^{(\perp 2)} \oplus R^{(\perp 1)} \oplus R^{(0)}$  avec

$$\begin{aligned} R^{(\perp 2)} &= \text{Vect}[\ell(\ell, 1)\underline{x} + \ell(\ell, 1)\underline{y} + \ell(\ell, 1)\underline{z}] \\ R^{(\perp 1)} &= \text{Vect}[\ell(m, 1)\underline{x} + m(\ell, 1)\underline{y} + m(\ell, 1)\underline{z}] \\ &\quad \oplus \text{Vect}[\ell(m, 1)\underline{y} + m(\ell, 1)\underline{z} + m(\ell, 1)\underline{x}] \\ &\quad \oplus \text{Vect}[\ell(m, 1)\underline{z} + m(\ell, 1)\underline{x} + m(\ell, 1)\underline{y}] \\ R^{(0)} &= \text{Vect}[m(m, 1)\underline{x} - m(m, 1)\underline{y}] \\ &\quad \oplus \text{Vect}[m(m, 1)\underline{x} - m(m, 1)\underline{z}]. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: Il est clair que l'opération  $m$  induit une structure commutative puisque  $k$  est la représentation triviale. De plus, les relations  $R^{(0)}$  traduisent l'associativité de  $m$ . On remarque aisément que  $R^{(\perp 2)}$  est le  $S_3$ -sous-espace engendré par la relation de Jacobi (*i.e.*  $R^{(\perp 2)} \cong R_{\text{Lie}}[2]$ ). Donc, si  $A$  est une  $\mathcal{G}$ -algèbre, l'opération  $\ell$  induit une structure d'algèbre de Lie sur  $A[1]$  via l'identification d'une application  $\ell\check{k} \otimes (A[1])^{\otimes 2} \rightarrow A[1]$  avec une application  $\ell k[1] \otimes A^{\otimes 2} \rightarrow A$ . Enfin les relations  $R^{(\perp 1)}$  traduisent la compatibilité des opérations  $\ell$  et  $m$ .  $\square$

Donnons un exemple, celui de l'algèbre de Gerstenhaber libre sur un espace vectoriel. Dans toute la suite on notera  $\text{Lie}(p) = \mathcal{O}p(\ell\check{k}, R^{(\perp 2)}[-2])(p)$ . Rappelons que  $\text{Lie}(A) = \bigoplus_{p \geq 1} \text{Lie}(p) \otimes_{S_p} A^{\otimes p}$  est l'algèbre de Lie libre sur  $A$ .

**Lemme 2.2:** *Soit  $A$  un espace vectoriel  $\mathbb{Z}$ -gradué. L'algèbre de Gerstenhaber libre sur  $A$  est*

$$\mathcal{G}(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(\text{Lie}(A[1]))[-n].$$

Le produit commutatif  $m$  est donné (au signe près) sur  $\mathcal{G}(A)$  par le produit extérieur. Précisément, soit  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_m$  des éléments de  $A^{\otimes p_1}, \dots, A^{\otimes p_n}$  et  $A^{\otimes q_1}, \dots, A^{\otimes q_m}$  respectivement. Pour  $x \in A^{\otimes p}$ , rappelons qu'on note  $|x|' = |x| + p$ . On a

$$m(x_1 \wedge \dots \wedge x_p, y_1 \wedge \dots \wedge y_q) = (-1)^{q(|x_1|' + \dots + |x_p|')} x_1 \wedge \dots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_q.$$

Le produit  $\ell$ , appliqué aux éléments  $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$  et  $y_1 \wedge \dots \wedge y_q$ , est donné par application de la règle de Leibniz (rappelons que le symbole  $\wedge$  correspond à une itération de la multiplication  $m$ ) à  $\ell(x_1 \wedge \dots \wedge x_p, y_1 \wedge \dots \wedge y_q)$  puis par composition sur les algèbres de Lie libres.

DÉMONSTRATION: Notons  $m^{\circ n}$  un générateur de  $\text{Com}(n) = \mathcal{O}p(mk, R^{(0)})(n)$  (en particulier  $m^{\circ 2} = m$ ).

Par définition, l'algèbre de Gerstenhaber libre sur  $A$  est

$$\mathcal{G}(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{G}(n) \otimes_{S_n} A^{\otimes n}.$$

Un élément de  $\mathcal{G}(n)$  s'écrit comme une combinaison linéaire de « compositions » des opérations  $m$  et  $\ell$ . Mais les relations  $R^{(\perp 1)}$  assurent que tout terme

du type  $\ell(m, 1)$  est égal, dans  $\mathcal{G}(n)$ , à une somme de deux termes de la forme  $m(\ell, 1)$ . On peut donc écrire chaque élément de  $\mathcal{G}(n)$  comme une somme de termes du type  $m(m(\dots m(\ell(\ell(\dots \ell)\dots)))$ .

Il est bien connu (*cf.* [8]) que les relations  $R^{(0)}$  induisent une structure d'algèbre commutative et que les relations  $R^{(2)}$  induisent une structure d'algèbre de Lie sur la suspension d'un espace vectoriel gradué. On en déduit un morphisme ( $n \geq 2$ )  $\psi$  de  $\mathcal{G}(n)$  dans

$$\bigoplus_{0 \leq j \leq n} m^{\circ j} k \otimes_{S_j} \left( \bigoplus_{p_1 + \dots + p_j = n} (\text{Lie}(p_1) \otimes_{S_{p_1}} \text{sgn}_{p_1}[p_1])[-1] \otimes \dots \right. \\ \left. \dots \otimes (\text{Lie}(p_j) \otimes_{S_{p_j}} \text{sgn}_{p_j}[p_j])[-1] \right).$$

Il est clair que la composition d'une opération commutative  $m^{\circ j}$  (sur  $j$  variables) avec le produit tensoriel de  $j$  opérations  $\ell_1, \dots, \ell_j$  (sur  $p_1, \dots, p_j$  variables respectivement) induit un morphisme réciproque de  $\psi$ . Par conséquent  $\mathcal{G}(n)$  est égal à

$$\bigoplus_{0 \leq j \leq n} m^{\circ j} k \otimes_{S_j} \left( \bigoplus_{p_1 + \dots + p_j = n} (\text{Lie}(p_1) \otimes \text{sgn}_{p_1}[p_1])[-1] \otimes \dots \right. \\ \left. \dots \otimes (\text{Lie}(p_j) \otimes \text{sgn}_{p_j}[p_j])[-1] \right).$$

On obtient alors la formule du lemme en effectuant le produit tensoriel avec  $A^{\otimes n}$  et en utilisant l'identité

$$\text{Lie}(A) = \bigoplus_{p \geq 1} \text{Lie}(p) \otimes_{S_p} A^{\otimes p}.$$

Les formules de composition s'en déduisent via l'identification

$$S^k(V[-1]) \cong V \wedge \dots \wedge V[-k].$$

□

*Remarque:* On peut aussi démontrer ce lemme en utilisant directement la propriété universelle des algèbres libres. On commence par montrer que le crochet de  $\text{Lie}(A[1])$  s'étend en un unique crochet de Gerstenhaber à  $\Lambda^*(\text{Lie}(A[1]))[-n] = \text{Com}(\text{Lie}(A[1])[-1])$ . Ensuite, étant donné une algèbre

de Gerstenhaber  $G$  et une application linéaire  $f : A \rightarrow G$ , la propriété universelle des algèbres de Lie libres permet d'étendre ce morphisme en un morphisme d'algèbres de Lie  $g : \text{Lie}(A[1]) \rightarrow G[1]$ . On étend  $g$  en un morphisme d'algèbres commutatives  $h : \text{Com}(\text{Lie}(A[1])[-1]) \rightarrow G$  de même et on vérifie que  $h$  est alors compatible avec les crochets de Gerstenhaber.

*Remarque:* En particulier l'algèbre commutative libre (sur  $A$ )

$$S(A) \cong \bigoplus_{n \geq 0} (A[1] \wedge \dots \wedge A[1])[-n]$$

est une sous-algèbre commutative de  $(\mathcal{G}(A), m)$ . De même l'algèbre de Lie libre sur  $A[1]$  (*i.e.*  $\bigoplus_{p \geq 1} \text{Lie}(p) \otimes A[1]^{\otimes p}$ ) est une sous-algèbre de Lie de  $(\mathcal{G}(A), \ell)$ .

### 3 Algèbres de Gerstenhaber à homotopie près

#### 3.1 Modèle minimal d'une opérade

Lorsque l'opérade  $\mathcal{P}$  est de Koszul, il existe une notion naturelle de  $\mathcal{P}$ -algèbre à homotopie près (*cf.* [8], [16]). Précisément, un *modèle quasi-libre* pour une opérade  $\mathcal{P}$  est un  $S$ -module  $\mathcal{W} = F(M)$  (*i.e.*  $\mathcal{W}$  est libre en tant qu'opérade d'espace vectoriel gradué) muni d'une différentielle et d'un quasi-isomorphisme  $\mathcal{W} \xrightarrow{i} \mathcal{P}$ .

Un modèle est dit *minimal* si  $d(M) \subset F(M)^{\geq 2}$ . Un modèle minimal est unique à isomorphisme près ([16]). On note  $\mathcal{P}_\infty$  le modèle minimal de  $\mathcal{P}$  s'il existe. Une  *$\mathcal{P}$ -algèbre à homotopie près* est une algèbre sur le modèle minimal de  $\mathcal{P}$  ([8], [16]).

Lorsque  $\mathcal{P}$  est de Koszul, son bar complexe  $\text{co}\mathcal{B}(\mathcal{P}^\perp) = F(\overline{\mathcal{P}^\perp}[-1])$  est un modèle quasi-libre de  $\mathcal{P}$ . On vérifie facilement qu'il est minimal. L'opérade  $\mathcal{P}_\infty$  s'identifie donc à l'opérade  $\text{co}\mathcal{B}(\mathcal{P}^\perp)$ . En particulier, ses opérations binaires sont les mêmes que celles de  $\mathcal{P}$ . Le lemme suivant dû à Ginzburg, Kapranov [8] et Getzler, Jones [7], va nous permettre d'identifier la structure des  $\mathcal{P}_\infty$ -algèbres.

**Lemme 3.1:** ([8], [7]) *Soit  $\mathcal{C}$  une coopérade coaugmentée. La donnée d'une structure de  $\text{co}\mathcal{B}(\mathcal{C})$ -algèbre sur  $A$  est équivalente à la donnée d'une différentielle de  $\mathcal{C}$ -cogèbre  $d : \mathcal{C}(A) \rightarrow \mathcal{C}(A)[1]$ .*

Donnons un bref aperçu de la démonstration car elle illustre la méthode que l'on va utiliser par la suite. L'opérade  $co\mathcal{B}(\mathcal{C})$  étant libre, une structure de  $co\mathcal{B}(\mathcal{C})$ -algèbre est uniquement déterminée par la restriction  $\gamma_{/co\mathcal{B}(\mathcal{C})^{(1)}} : \mathcal{C}(A) \rightarrow A$ , c'est-à-dire par des applications

$$d_n : \mathcal{C}(n) \otimes A^{\otimes n} \rightarrow A.$$

De même, comme  $\mathcal{C}(A)$  est colibre, une différentielle  $d : \mathcal{C}(A) \rightarrow \mathcal{C}(A)$  est aussi uniquement déterminée par une famille d'applications  $d_n : \mathcal{C}(n) \otimes A^{\otimes n} \rightarrow A$ .

Les conditions de compatibilité de  $\gamma$  provenant de la structure d'opérade différentielle sont équivalentes à la condition  $d^2 = 0$ .

En particulier, une  $\mathcal{P}_\infty$ -algèbre est déterminée par une différentielle  $d : \mathcal{P}^\perp(A) \rightarrow \mathcal{P}^\perp(A)$ . Les opérations binaires de  $\mathcal{P}_\infty$  sont, par exemple, données par  $d_2$ .

*Exemple:* La construction précédente appliquée à l'opérade Ass redonne la notion d'algèbre associative à homotopie près (appelée  $A_\infty$ -algèbres dans la littérature) introduite par Stasheff [18].

De même, si on prend l'opérade Lie, on retrouve la définition des  $L_\infty$ -algèbres classiques (*cf.* [13] par exemple) et pour l'opérade Com on obtient la notion usuelle de  $C_\infty$ -algèbre [8].

### 3.2 L'opérade $\mathcal{G}_\infty$

Par définition une algèbre de Gerstenhaber à homotopie près, encore appelée  $\mathcal{G}_\infty$ -algèbre, est une algèbre sur le modèle minimal de l'opérade  $\mathcal{G}$ . Il est connu que les algèbres de Gerstenhaber sont de Koszul (*cf.* [7], [15], [19] et Proposition 5.1). Une structure de  $\mathcal{G}_\infty$ -algèbre sur un espace vectoriel  $A$  est donc uniquement déterminée par la donnée d'une codifférentielle sur la  $\mathcal{G}^\perp$ -coalgèbre libre sur  $A$ . Avant de décrire la structure des  $\mathcal{G}_\infty$ -algèbres on va donc s'intéresser à la coopérade  $\mathcal{G}^\perp$ .

**Lemme 3.2:** *La coopérade duale de  $\mathcal{G}$  est  $\mathcal{G}^\perp \cong (\mathcal{G}^*)_2$ . L'opérade duale (au sens de [8]) de  $\mathcal{G}$  est  $\mathcal{G}^\dagger = \mathcal{G}_{\perp 1}$ .*

DÉMONSTRATION: Par définition,  $\mathcal{G}^\perp$  est la coopérade co-engendrée par  $M = \mathcal{G}(2)[1]$  et les co-relations

$$R^\perp = \frac{(F\mathcal{G}(2))(3)[2]}{R[2]}.$$

En particulier,  $\mathcal{G}^\perp$  est engendrée par  $\ell k[2] \oplus m k[1]$ . De plus il est bien connu (cf. [8] par exemple) que  $(F\mathcal{G}(2))^{(0)}(3)/R^{(0)}$  correspond au sous-espace engendré par les relations de Jacobi et que  $(F\mathcal{G}(2))^{(\perp 2)}(3)/R^{(\perp 2)}$  à celui engendré par la relation d'associativité. On vérifie facilement que le quotient  $(F\mathcal{G}(2))^{(\perp 1)}(3)/R^{(\perp 1)}$  donne des relations symétriques à celles de  $R^{(\perp 1)}$  en inversant le rôle de  $\ell$  et  $m$ .

On a  $(\mathcal{G}^*)(2) = \ell^* k[-1] \oplus m^* k$ . Donc  $(\mathcal{G}^*)_2(2) = \ell^* k[1] \oplus m^* k[2]$ . On obtient aisément la première égalité du lemme en identifiant  $\ell^*$  avec  $m$  et  $m^*$  avec  $\ell$ . La seconde formule est une conséquence immédiate de la première et de la formule  $\mathcal{P}^\dagger = (\mathcal{P}^\perp)_1^*$  ([7]).  $\square$

On notera dans la suite  $\text{Ha}_p(A)$  le quotient de  $A^{\otimes p}$  par l'action des « shuffles » signés non triviaux, c'est-à-dire le quotient de  $A^{\otimes p}$  par la somme des images des applications

$$\text{sh} : A^{\otimes m} \otimes A^{\otimes n} \rightarrow A^{\otimes m+n} \quad \text{où } m, n \geq 1, m + n = p.$$

Rappelons qu'un  $(p, n-p)$ -shuffle est une permutation  $\sigma$  de  $1, \dots, n$  telle que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$  et  $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(n)$ . Le produit  $\text{sh}$  est défini, pour  $a_1, \dots, a_n \in A^{\otimes n}$ , par

$$\text{sh}(a_1 \otimes \dots \otimes a_p, a_{p+1} \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{(p, n-p)\text{-shuffles}} \text{sgn}(\sigma^{\perp 1}) a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Rappelons que  $\text{Ha}_p(A)$  est la composante de degré  $p-1$  du complexe de Harrison d'une algèbre commutative.

**Lemme 3.3:** *La  $\mathcal{G}^\perp$ -coalgèbre libre sur un espace vectoriel gradué  $A$  est donnée par*

$$\mathcal{G}^\perp(A) = \bigoplus_{p_1 \leq \dots \leq p_n} (\text{Ha}_{p_1}(A)[p_1] \wedge \dots \wedge \text{Ha}_{p_n}(A)[p_n])[n-2].$$

Le coproduit  $\delta_m$  est donné, pour  $x_i \in A^{\otimes p_i}$  ( $i = 1 \dots n$ ), par

$$\delta_m(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \sum \text{sgn}'(\sigma) x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(i)} \otimes x_{\sigma(i+1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(n)}$$

où la somme se fait sur tous les  $(i, n-i)$ -shuffles.

Le cocrochet  $\delta_\ell$  est donné par la formule suivante :

$$\delta_\ell(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \sum \text{sgn}'(\sigma) \beta_k x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(i)} \wedge (v_1^k, \dots, v_j^k) \otimes (v_{j+1}^k, \dots$$

$$\dots, v_{p_k}^k) \wedge x_{\sigma(i+1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(n)}.$$

Dans la formule précédente, la somme est étendue à tous les entiers  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq j \leq p_k$  et toutes les permutations  $\sigma$  qui fixent  $k$  et telle que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(i)$  et  $\sigma(i+1) < \dots < \sigma(n)$  ( $1 \leq i \neq k \leq n$ ), i.e.  $\sigma$  est un  $(i, n-1-i)$ -shuffle sur  $1, \dots, n-k$ . On a noté  $x_k = (v_1^k, \dots, v_j^k, v_{j+1}^k, \dots, v_{p_k}^k)$ . Le signe  $\beta_k$  est donné par

$$\beta_k = (-1)^{(|v_1| + \dots + |v_j|)(p_k - j)}.$$

DÉMONSTRATION: Il suffit de faire une démonstration analogue à celle du lemme 2.2. On peut aussi appliquer le lemme 3.2. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^\perp(A) &= \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{G}^\perp(n) \otimes A^{\otimes n} \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{G}^*)_2(n) \otimes A^{\otimes n}. \end{aligned}$$

Rappelons que  $(\mathcal{G}^*)_2(n) = (\mathcal{G}^*)(n) \otimes \text{sgn}_n[n-1] \otimes \text{sgn}_n[n-1] = (\mathcal{G}^*)(n)[2n-2]$ . D'après le lemme 2.2 (et avec les mêmes notations), comme  $\mathcal{G}$  est de dimension finie, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^\perp(A) &= \bigoplus_{0 \leq j \leq n} \left( (m^*)^{\circ j} k \otimes_{S_j} \bigoplus_{p_1 + \dots + p_j = n} (\text{Lie}^*(p_1) \otimes_{S_{p_1}} \text{sgn}_{p_1}[p_1])[1] \otimes \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \otimes (\text{Lie}^*(p_j) \otimes_{S_{p_j}} \text{sgn}_{p_j}[p_j])[1] \right) [-2] \otimes A^{\otimes n}. \\ &= \bigoplus_{0 \leq j \leq n} \left( (m^*)^{\circ j} k \otimes_{S_j} \bigoplus_{p_1 + \dots + p_j = n} (\text{Lie}^*(p_1) \otimes_{S_{p_1}} \text{sgn}_{p_1}[p_1]) \otimes \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \otimes (\text{Lie}^*(p_j) \otimes_{S_{p_j}} \text{sgn}_{p_j}[p_j]) \right) \otimes_{S_j} \text{sgn}_j[j-2] \otimes A^{\otimes n}. \end{aligned}$$

On sait que l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\bigoplus_n \text{Lie}(n) \otimes A^{\otimes n}) = \bigoplus_n A^{\otimes n}$  et que cette algèbre de Hopf est munie du coproduit engendré par les « shuffles » (sans signe). On en déduit que  $\text{Lie}^*(p) \otimes \text{sgn}_p \otimes_{S_p} A^{\otimes p} = \text{Ha}_p(A)$  et que

$$\mathcal{G}^\perp(A) = \bigoplus_{p_1 \leq \dots \leq p_j} (\text{Ha}_{p_1}(A)[p_1] \otimes \dots \otimes \text{Ha}_{p_j}(A)[p_j]) [n-2].$$

Le coproduit est défini à partir du coproduit sur la coalgèbre commutative sur l'espace vectoriel gradué  $\oplus A^{\otimes p}[p-1]$  ce qui donne la formule pour  $\delta_m$ . Le cocrochet est défini sur la coalgèbre de Lie colibre associée à  $A$  et étendu uniquement à  $\mathcal{G}^\perp(A)$  comme dans [3], Définition 2.1.  $\square$

*Remarque:* On peut aussi démontrer ce lemme en utilisant directement les propriétés universelles des cogèbres colibres comme pour le lemme 2.2.

On peut maintenant décrire la structure d'une algèbre de Gerstenhaber à homotopie près.

**Théorème 3.4:** *Une algèbre de Gerstenhaber à homotopie près est la donnée d'un espace vectoriel gradué muni d'une famille d'applications*

$$m_{p_1, \dots, p_n} : A^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes A^{\otimes p_n} \rightarrow A$$

de degré  $3 - (n + p_1 + \dots + p_n)$  pour tout  $n, p_1, \dots, p_n \geq 1$ , telles que

i) pour tout  $x_1, \dots, x_n$  dans  $A^{\otimes p_1}, \dots, A^{\otimes p_n}$  et  $\sigma \in S_n$ , on ait

$$m_{p_1, \dots, p_n}(x_1, \dots, x_n) = \text{sg}'(\sigma) m_{p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)});$$

ii) pour tout  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , l'application de  $A^{\otimes p_i}$  dans  $A$  donnée par

$$y \mapsto m_{p_1, \dots, p_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

s'annule sur les « shuffles » non triviaux;

iii) l'unique codérivation  $d$  de  $\mathcal{G}^\perp(A)$  étendant  $\sum_{p_1, \dots, p_n, n} m_{p_1, \dots, p_n}$  vérifie  $d^2 = 0$ .

La condition iii) du théorème s'explique de la manière suivante. Soient  $x_1 = (v_1^1, \dots, v_{p_1}^1), \dots, x_n = (v_1^n, \dots, v_{p_n}^n)$  des éléments de  $A^{\otimes p_1}, \dots, A^{\otimes p_n}$  respectivement. La condition iii) est équivalente à

$$\sum_{\substack{(s, n-s)\text{-shuffle} \\ s = 1..n}} \sum_{\substack{q_1 + r_1 = p_{\sigma(1)+1} \\ q_2 + r_2 = p_{\sigma(2)} \\ \dots \\ q_n + r_n = p_{\sigma(n)}}} \sum_{\substack{\ell_1 + q_1 \leq p_{\sigma(1)} \\ \dots \\ \ell_s + q_s \leq p_{\sigma(s)}}} \pm M_q^\ell(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(s)}) = 0$$

avec  $q_{s+1} = \dots = q_n = 0$  et

$$M_q^\ell(x_1, \dots, x_s) = m_{r_1, \dots, r_n}((v_1^1, \dots, v_{\ell_1}^1, m_{q_1, \dots, q_s}(v(1), \dots, v(s)), v_{\ell_1 + q_1 + 1}^1,$$

$$\dots, v_{p_1}^1) \otimes \widehat{x}_2 \dots \dots \otimes \widehat{x}_s \otimes x_{s+1} \dots \otimes x_n).$$

Dans la formule précédente on a noté  $\widehat{x}_k$  ( $k = 1 \dots s$ ) le  $r_k$ -tenseur

$$\widehat{x}_k = (v_1^{p_k}, v_2^{p_k}, \dots, v_{\ell_k}^{p_k}, v_{k+q_k+1}^{p_k}, \dots, v_{p_k}^{p_k}).$$

Pour  $r = 1, \dots, s$ , on a noté  $v(j_r)$  l'élément de  $A^{\otimes q_r}$  (qui dépend aussi de  $i_r, q_r$ ) suivant

$$v(j_r) = (v_{i_r+1}^{j_r}, \dots, v_{i_r+q_r}^{j_r}).$$

En particulier  $\widehat{x}_{j_k} = x_j^k$  où on a ôté le tenseur  $v(j_k)$ .

Le signe  $\pm$  est obtenu en appliquant les conventions de signes de Koszul-Quillen en se rappelant que  $m_{q_1, \dots, q_s}$  est de degré  $3 - (q_1 + \dots + q_s) - s$ . Explicitement, en notant  $\tau$  la permutation associée au réindçage du terme de gauche de la formule, on a

$$\pm = (-1)^{(1 \perp q_1 \perp \dots \perp q_s \perp s)} (r_2 + \dots + r_n + n \perp 1 + |v_1^{\sigma(1)}| + \dots + |v_{\ell_1}^{\sigma(1)}| + p_{\sigma(1)} + \ell_{\sigma(1)}) + \ell_{\sigma(1)} \text{sg}'(\tau).$$

DÉMONSTRATION: Une structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près sur  $A$  est donnée par une codifférentielle  $d$  sur la  $\mathcal{G}^\perp$ -coalgèbre  $\mathcal{G}^\perp(A)$  libre sur  $A$ . Une telle codifférentielle est uniquement déterminée par sa projection sur  $\mathcal{G}^\perp(A)(1) = A$ . D'après le lemme 3.3 l'application  $d$  est donc définie par une famille d'applications

$$d_{p_1, \dots, p_n} : \bigoplus_{p_1 \leq \dots \leq p_n} (\text{Ha}_{p_1}(A)[p_1] \wedge \dots \wedge \text{Ha}_{p_n}(A)[p_n])[n-2] \longrightarrow A[1].$$

Il est clair que la donnée de  $d_{p_1, \dots, p_n}$  est équivalente à la donnée d'applications

$$m_{p_1, \dots, p_n} : A^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes A^{\otimes p_n} \rightarrow A[3 - n - (p_1 + \dots + p_n)]$$

satisfaisant *i*) et *ii*) (car  $\text{Ha}_n(A)$  est égal à  $A^{\otimes n}$  quotienté par les « shuffles » non triviaux). Précisément, on a la formule

$$d_{p_1, \dots, p_n}(s^{n \perp 2} s^{p_1} x_1 \wedge \dots \wedge s^{p_n} x_n) = (-1)^{\sum_{i=1}^n \perp 1 |x_i| (p_{i+1} + \dots + p_n)} m_{p_1, \dots, p_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Utilisant la structure de coalgèbre donnée par le lemme 3.3 pour écrire l'application  $d$ , on obtient que la condition  $d^2 = 0$  correspond à la formule *iii*). □

*Explicitation en basses dimensions* : L'application  $m_1 : A \rightarrow A[1]$  vérifie  $m_1^2 = 0$  d'après la propriété *iii*) du théorème 3.4; c'est donc une différentielle sur  $A$ . L'application  $m_2 : A^{\otimes 2} \rightarrow A$  est de degré  $3 - 2 - 1 = 0$ . Elle doit de plus vérifier  $m_2(\text{sh}(a, b)) = 0$  où  $\text{sh}(a, b) = (a, b) - (b, a)$  désigne le « shuffle » de  $a$  et  $b$ . Il en résulte que  $m_2$  est une opération commutative. De plus, la condition *iii*) pour des éléments de  $A^{\otimes n}$  s'écrit sous la forme

$$\sum \pm m_j(a_1, \dots, a_p, m_k(a_{p+1}, \dots, a_{p+j}), \dots, a_{j+k+1}) = 0,$$

c'est-à-dire  $(A, m_1, m_2, \dots, m_n, \dots)$  définit une structure d'algèbre associative à homotopie près.

De même, l'opération  $m_{1,1} : A \otimes A \rightarrow A$  est de degré  $3 - 1 - 1 - 2 = -1$ . De plus, d'après le *i*) du théorème 3.4,  $\tilde{m}_{1,1} : A[1] \otimes A[1] \rightarrow A[1]$  (induite par  $m_{1,1}$ ) est antisymétrique. De même, les opérations  $m_{1,\dots,1}$  ( $n$  facteurs 1) induisent des opérations  $n$ -linéaires alternées  $\tilde{m}_{1,\dots,1}$ . On peut encore vérifier que la condition *iii*) définit une structure d'algèbre de Lie à homotopie près sur  $(A[1], \tilde{m}_1, \tilde{m}_{1,1}, \tilde{m}_{1,1,1}, \dots)$ .

Les autres relations déduites de *iii*) décrivent une chaîne de conditions de compatibilité du type Leibniz pour les opérations  $m_{p_1, \dots, p_n}$ . Par exemple, pour  $m_{1,2}$  on obtient, d'après le théorème 3.4, pour tout  $x, y, z \in A$ ,

$$\begin{aligned} m_1(m_{1,2}(x, y, z)) + m_{1,2}(m_1(x, y, z)) + m_{1,1}(x, m_2(y, z)) \\ - m_2(m_{1,1}(x, y), z) + (-1)^{1+|y|(|x|+1)} m_2(y, m_{1,1}(x, z)) = 0 \end{aligned}$$

où on a noté  $m_1(x, y, z)$  la différentielle induite par  $m_1$  sur  $A \otimes (A^{\otimes 2}[1])$ . En particulier  $m_{1,2}$  fournit une homotopie pour l'identité de Leibniz du crochet  $m_{1,1}$  et du produit  $m_2$ .

Dans [20], Définition 1.1, Tamarkin et Tsygan ont donné une définition d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près très proche de la nôtre. Leur structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près est définie comme la donnée d'un espace gradué  $A$  et d'une différentielle  $d$  (de degré 1) sur l'algèbre extérieure sur l'algèbre de Lie libre sur le dual linéaire de  $A$ :

$$\Lambda^*(\text{Lie}(A[1]^*)).$$

**Corollaire 3.5:** *Si  $A$  est un espace vectoriel de dimension finie, la structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près donnée par le théorème 3.4 coïncide avec celle de [20], Définition 1.1.*

DÉMONSTRATION: Les opérations définies sur  $A$  sont données par des applications

$$\delta_{p_1, \dots, p_n} : A[1]^* \rightarrow \text{Lie}(A[1]^*)(p_1) \wedge \dots \wedge \text{Lie}(A[1]^*)(p_n).$$

Lorsque  $A$  est de dimension finie on a un isomorphisme canonique  $(A^*)^* \cong A$  et les opérations  $\delta_{p_1, \dots, p_n}$  induisent des opérations

$$\check{\delta}_{p_1, \dots, p_n}^* : (\text{Lie}^*(A[1])(p_1) \wedge \dots \wedge \text{Lie}^*(A[1])(p_n)) [n] \rightarrow A[2]$$

par passage au dual et suspension.

Le raisonnement des démonstrations du lemme 3.3, du théorème 3.4 et de la remarque 1.2 de [20] assure alors que les opérations  $\check{\delta}_{p_1, \dots, p_n}^*$  vérifient les relations du théorème 3.4. Les opérations  $\delta_{p_1, \dots, p_n}$  sont donc équivalentes aux opérations duales  $m_{p_1, \dots, p_n}$  du théorème 3.4.  $\square$

*Exemple:* Il est clair que toute  $\mathcal{G}$ -algèbre  $(X, m, \ell)$  est munie d'une structure de  $\mathcal{G}_\infty$ -algèbre donnée par  $m_2 = m$ ,  $m_{1,1} = \ell$  et  $m_{p_1, \dots, p_n} = 0$  sinon. Cette structure correspond à la codifférentielle obtenue en prenant la codifférentielle de Harrison sur  $\text{Ha}_p(X)$  et en prolongeant le crochet de Lie  $\ell$  à  $\Lambda(\text{Ha}_*(X))$ .

Tamarkin a prouvé dans [19] (*cf.* aussi [9], [20]) que le complexe de chaînes de Hochschild d'une algèbre associative est naturellement muni d'une structure de  $\mathcal{G}_\infty$ -algèbre *via* l'action des « braces » opérations de [6]. Précisément, la structure de  $\mathcal{G}_\infty$ -algèbre induite sur  $C^*(A, A)$  est obtenue en prenant les opérations  $m_{p_1, \dots, p_n} = 0$  si  $n \geq 3$ . Les opérations  $m_p, m_{p,q}$  sont construites, de manière non explicite, à partir de la différentielle  $b$ , du cup-produit, du crochet de Gerstenhaber et des « braces » d'ordre supérieur *cf.* [19]. En particulier, l'opération  $m_2$  munit  $C^*(A, A)$  d'un produit commutatif associatif à homotopie près qui n'est pas le cup-produit habituel, mais induit la même opération que le cup-produit sur la cohomologie  $H^*(A, A)$ . Cette structure est en fait un cas particulier de l'exemple suivant.

Une structure de  $\mathfrak{BL}_\infty$ -algèbre sur un espace vectoriel gradué  $X$  (*cf.* [9], [19]) est déterminée par la donnée d'une différentielle et d'une multiplication sur la cogèbre de Lie libre  $\mathfrak{BL}(X) := \bigoplus_{n \geq 1} \text{Ha}_n(X)[n]$  engendrée par  $X[1]$ , telles que, muni de son cocrochet canonique et des deux structures données,  $\mathfrak{BL}(X)$  devienne une bigèbre de Lie différentielle graduée.

**Lemme 3.6:** *Une structure de  $\mathfrak{BL}_\infty$ -algèbre sur l'espace vectoriel gradué  $X$  est définie par des opérations*

- i)  $\ell_m : X^{\otimes m} \rightarrow X$  de degré  $2 - m$  telles que l'unique codérivation de  $\mathfrak{BL}(X)$  définie par  $\sum_{m \geq 1} \ell_m$  est une codifférentielle;
- ii)  $\ell_{p,q} : X^{\otimes p} \otimes X^{\otimes q} \rightarrow X$  de degré  $1 - p - q$  telle que l'unique crochet de  $\mathfrak{BL}(X)$  défini par  $\sum_{p,q \geq 1} \ell_{p,q}$  induise une structure de bigèbre de Lie compatible avec la codifférentielle précédente.

DÉMONSTRATION: L'espace vectoriel  $\mathfrak{BL}(X)$  étant muni d'une structure de cogèbre de Lie colibre, un calcul très facile et analogue à celui du théorème 3.4 donne le résultat.  $\square$

Toute  $\mathfrak{BL}_\infty$ -algèbre  $(X, \ell_*, \ell_{*,*})$  est en particulier une  $\mathcal{G}_\infty$ -algèbre. En effet, il suffit de poser  $m_{p_1} = \ell_{p_1}$ ,  $m_{p_1, p_2} = \ell_{p_1, p_2}$  et  $m_{p_1, \dots, p_n} = 0$  pour  $n \geq 3$ . Cette structure définit bien une codifférentielle sur  $\mathcal{G}^\perp(X)$ : c'est précisément la codifférentielle de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie différentielle  $\mathfrak{BL}(X)$ .

Il y a une équivalence entre la catégorie des  $\mathfrak{BL}_\infty$ -algèbre et la catégorie des  $B_\infty$ -algèbre ([7]) démontrée dans [19]. Il en résulte que toute  $B_\infty$ -algèbre ou toute algèbre de Hirsch ([10]) est munie d'une structure naturelle de  $\mathcal{G}_\infty$ -algèbre. Il est à noter que cette équivalence dépend du choix d'un associateur de Drinfeld et n'est pas explicite. Un exemple important de  $B_\infty$ -algèbre est le complexe de cochaînes de Hochschild, cf. [21].

## 4 Homologie des algèbres de Gerstenhaber

### 4.1 Homologie opéradique

Dans [8], Ginzburg et Kapranov ont étendu la dualité de Koszul des algèbres au cas des opérades pour obtenir une notion « naturelle » d'homologie des algèbres associées à une opérade  $\mathcal{P}$  de Koszul. Précisément, ils ont explicité un complexe associé à toute  $\mathcal{P}$ -algèbre  $A$ , tel que la nullité de la composition des deux dernières flèches soit donnée par les relations de  $\mathcal{P}$ . Rappelons leur construction.

Le complexe associé à toute  $\mathcal{P}$ -algèbre  $A$  est simplement la  $\mathcal{P}^\perp$ -coalgèbre libre  $\mathcal{P}^\perp(A)$  en tant qu'espace vectoriel. Si  $(A, \delta)$  est une algèbre différentielle on munit le complexe précédent de l'unique codifférentielle qui prolonge  $A \xrightarrow{\delta} A$ . On le munit aussi de l'unique codifférentielle déterminée par

l'application

$$d : \mathcal{P}^\perp(A) \longrightarrow \mathcal{P}^\perp(2) \otimes A^{\otimes 2} \cong \mathcal{P}(2) \otimes A^{\otimes 2}[1] \xrightarrow{\gamma} A[1].$$

L'homologie opéradique de  $A$  est l'homologie du complexe  $(\mathcal{P}^\perp(A), d)$  (ou du bicomplexe  $\mathcal{P}^\perp(A), d + \delta$  si  $A$  est différentielle).

*Exemple:* Si  $A$  est une algèbre associative le complexe  $(\text{Ass}^\perp(A), d)$  est le complexe de Hochschild (non unitaire) classique  $(C_*(A, A) = A^{\otimes *}, b')$ .

Si  $(\mathfrak{g}, [ ; ])$  est une algèbre de Lie, le complexe  $(\text{Lie}^\perp(\mathfrak{g}), d)$  est le complexe de Chevalley-Eilenberg  $(\Lambda \mathfrak{g}, d_{[\cdot; \cdot]})$  dont on notera l'homologie  $H_*^{\text{Lie}}(\mathfrak{g})$ .

Enfin, si  $A$  est une algèbre commutative et associative, le complexe de chaînes  $(\text{Com}^\perp(A), d)$  est le complexe de Harrison  $(\text{Ha}_*(A), b)$  obtenu en quotientant le complexe de Hochschild par les « shuffles » non triviaux (*i.e.* de la forme  $\text{sh}(x, y)$  où  $x, y \in \text{Ha}_{*\geq 1}(A)$ , *cf.* 3.2). Son homologie sera notée  $\text{Harr}_*(A)$ .

## 4.2 Le complexe $\mathcal{G}^\perp(A)$

Rappelons que l'opérade  $\mathcal{G}$  est de Koszul. L'homologie opéradique d'une algèbre de Gerstenhaber  $A$  est donc donnée par l'homologie du complexe  $C\mathcal{G}(A) = (\mathcal{G}^\perp(A), d)$  où  $d$  est induite par  $\mathcal{G}(2) \otimes A^{\otimes 2} \rightarrow A$ .

**Théorème 4.1:** *L'homologie opéradique d'une algèbre de Gerstenhaber  $A$  est l'homologie du complexe  $(C\mathcal{G}(A) = (\mathcal{G}^\perp(A), d)$  où, pour tout  $x_1 = (v_1^1, \dots, v_{i_1}^1)$ , ...,  $x_n = (v_1^n, \dots, v_{i_n}^n)$ , la codifférentielle  $d$  est définie par*

$$\begin{aligned} d(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} (\pm x_1 \wedge \dots \wedge x_{i\pm 1} \wedge (v_1^i, \dots, m(v_j^i, v_{j+1}^i), \dots, v_{p_i}^i) \wedge x_{i+1} \\ &\quad \wedge x_{i+2} \wedge \dots \wedge x_n) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{q=1}^{p_i} \sum_{r=1}^{p_j} \pm x_1 \wedge \dots \wedge x_{i\pm 1} \wedge (v_1^i, \dots, \ell(v_q^i, v_r^j), \dots, v_{p_i}^i, v_1^j, \\ &\quad \dots, \widehat{v_r^j}, \dots, v_{p_j}^j) \wedge x_{i+1} \dots \wedge x_{j\pm 1} \wedge \widehat{x_j} \wedge x_{j+1} \wedge \dots \wedge x_n. \end{aligned}$$

On notera  $H\mathcal{G}_*(A)$  et on appellera *homologie de Gerstenhaber* d'une  $\mathcal{G}$ -algèbre  $A$  les groupes d'homologie de  $(C\mathcal{G}(A), d)$ .

Les signes sont donnés dans la formule du théorème par les conventions de Koszul-Quillen. Le signe  $\pm$  de la première ligne est  $(-1)^{j\pm 1+|x_1|'+\dots+|x_{i-1}|'}$ . Le signe  $\pm$  de la seconde est le produit  $\varepsilon(\sigma)'\varepsilon(\tau)$  où  $\sigma$  est l'unique permutation telle que

$$(x_1 \wedge \dots \wedge x_n)^\sigma = x_1 \wedge \dots \wedge x_i \wedge x_j \wedge \dots \wedge \widehat{x_j} \wedge \dots \wedge x_n$$

et  $\tau$  l'unique permutation telle que

$$(v_1^i, \dots, v_{p_i}^i, v_1^j, \dots, v_{p_j}^j)^\tau = (v_1^i, \dots, v_q^i, v_r^j, \dots, v_{p_i}^i, v_1^j, \dots, \widehat{v_r^j}, \dots, v_{p_j}^j).$$

La notation  $\widehat{v_r^j}$  signifie qu'on a omis  $v_r^j$  dans la formule.

Avant de démontrer le théorème 4.1 on énonce le lemme suivant.

**Lemme 4.2:** *La différentielle  $d$  du complexe  $(\mathcal{G}^\perp(A), d)$  se décompose sous la forme  $d = d_m + d_\ell$  où  $d_m$  est une somme de différentielles de Harrison et  $d_\ell$  est une différentielle de Chevalley-Eilenberg.*

DÉMONSTRATION: La différentielle  $d$  est induite par  $\mathcal{G}^\perp(2) \otimes A^{\otimes 2} \rightarrow A$ , c'est-à-dire par  $m : A^{\otimes 2} \rightarrow A[1]$  et  $\ell : A[1] \wedge A[1] \rightarrow A[1][1]$ . On obtient facilement que  $d$  se décompose sous la forme  $d = d_m + d_\ell$  où  $d_m$  et  $d_\ell$  sont les différentielles induites par  $m$  et  $\ell$  respectivement.

La différentielle  $d_m$  est l'unique codifférentielle induite par

$$\mathcal{G}^\perp(A) \rightarrow \mathcal{G}^\perp(2) \otimes A^{\otimes 2} \xrightarrow{m} A.$$

On déduit des formules pour le coproduit de  $\mathcal{G}^\perp(A)$  du lemme 3.3 que

$$d_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \pm x_1 \wedge \dots \wedge x_{i-1} \wedge (v_1^i, \dots, m(v_j^i, v_{j+1}^i), \dots, v_{p_i}^i) \wedge x_{i+1} \wedge \dots \wedge x_n.$$

En particulier, la différentielle  $d_m$  est une somme de différentielles de Harrison (*i.e.* de quotients de la différentielle de Hochschild non unitaire  $b'$ ). Précisément,  $d_m$  est la somme (au signe près) des différentielles de Harrison sur les complexes  $A^{\otimes p_1}, \dots, A^{\otimes p_n}$ . De même, pour tout  $x_1 \in A^{\otimes p_1}, \dots, x_n \in A^{\otimes p_n}$ , on obtient la formule

$$d_\ell(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{q=1}^{p_i} \sum_{r=1}^{p_j} \pm x_1 \wedge \dots \wedge x_{i-1} \wedge (v_1^i, \dots, \ell(v_q^i, v_r^j), \dots, v_{p_i}^i, v_1^j, \dots)$$

$$\dots, \widehat{v_r^j}, \dots, v_{p_j}^j) \wedge x_{i+1} \dots \wedge x_n.$$

En particulier la différentielle  $d_\ell$  est la différentielle de Chevalley-Eilenberg associée au crochet  $[\ ; ] : \mathcal{G}^\perp(A) \otimes \mathcal{G}^\perp(A) \rightarrow \mathcal{G}^\perp(A)$  qui prolonge le crochet  $\ell : A \otimes A \rightarrow A$  (cf. [3], Définition 2.1).  $\square$

*Démonstration du théorème 4.1* : On a déjà vu que le complexe opéradique est  $(C\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}^\perp(A))$ , c'est-à-dire

$$\bigoplus_{p_1 \leq \dots \leq p_n} (\mathrm{Ha}_{p_1}(A)[p_1] \wedge \dots \wedge \mathrm{Ha}_{p_n}(A)[p_n])[n-2]$$

d'après le lemme 3.3. La formule pour la différentielle  $d$  découle alors du lemme 4.2 et de sa démonstration.  $\square$

*Remarque*: D'après le lemme 4.2, la différentielle  $d$ , restreinte à  $\mathrm{Ha}_*(A)$ , est simplement la différentielle de Harrison. De même, la différentielle  $d$ , restreinte à  $\Lambda^*(A[1])$ , est la différentielle de Chevalley-Eilenberg standard de l'algèbre de Lie  $A[1]$ .

La décomposition  $d = d_m + d_\ell$  de la différentielle  $d$  du lemme 4.2 donne naturellement naissance à une suite spectrale qui converge vers l'homologie de Gerstenhaber.

Pour une  $\mathcal{G}$ -algèbre  $A$ , notons  $\Lambda_q \mathrm{Harr}(A)^p$  l'espace vectoriel suivant :

$$\Lambda_q \mathrm{Harr}(A)^p[1] = \bigoplus_{\substack{p_1 \leq \dots \leq p_q \\ p_1 + \dots + p_q = p}} \mathrm{Harr}_{p_1}(A)[1] \wedge \dots \wedge \mathrm{Harr}_{p_q}(A)[1].$$

**Théorème 4.3**: *Soit  $A$  une algèbre de Gerstenhaber. On a une suite spectrale convergente*

$$E_{p,q}^2 = H_q(\Lambda_* \mathrm{Harr}(A)^p[1], d_\ell) \implies H\mathcal{G}_{p+q}(A).$$

**DÉMONSTRATION**: On définit un bidegré sur  $\mathcal{G}^\perp(A)$ . Pour  $x \in \mathrm{Ha}_m(A)$ , on pose  $\mathrm{deg}_1(x) = m-1$  (i.e. le  $\mathrm{deg}_1(x)$  correspond au nombre de multiplications nécessaires pour écrire  $x$  dans la cogèbre colibre  $\mathcal{G}^\perp(A)$ ). On étend ce degré à  $\mathcal{G}^\perp(A)$  en posant

$$\mathrm{deg}_1(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \mathrm{deg}_1(x_1) + \dots + \mathrm{deg}_1(x_n).$$

On définit un deuxième degré sur  $\mathcal{G}^\perp(A)$  en posant  $\deg_2(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = n - 1$ . Autrement dit,  $\deg_2(x)$  correspond au nombre de crochets nécessaires pour écrire  $x$  dans la cogèbre colibre  $\mathcal{G}^\perp(A)$ . Finalement, le bidegré  $|x|$  est, par définition,  $|x| = (\deg_1(x), \deg_2(x))$ .

Le lemme 4.2 assure que  $d$  se décompose sous la forme  $d = d_m + d_\ell$ . De plus  $d_m$  est de bidegré  $(-1, 0)$  et  $d_\ell$  de bidegré  $(0, -1)$ . L'application  $d_m$  est en fait une différentielle, *i.e.*  $d_m^2 = 0$ , puisque c'est une somme de bord de Harrison. De plus,  $d_\ell$  étant la différentielle induite par l'opération  $\ell$  sur  $\mathcal{G}^\perp(A)$ , on a donc aussi  $d_\ell^2 = 0$ . Enfin la condition de compatibilité de Leibniz entre  $m$  et  $\ell$  assure que  $d_m d_\ell + d_\ell d_m = 0$ . Par conséquent, le complexe  $(C\mathcal{G}(A), d)$  est un bicomplexe (noté  $(C\mathcal{G}(A), d_m, d_\ell)$ ) et  $H\mathcal{G}_*(A)$  est l'homologie du complexe total associé.

Ce bicomplexe est contenu dans le premier quadrant puisque  $\deg_1$  et  $\deg_2$  sont toujours positifs. Il y a donc une suite spectrale qui converge vers  $H\mathcal{G}_*(A)$  dont le premier terme  $E_{p,q}^1$  est obtenu en prenant l'homologie de  $(\mathcal{G}^\perp(A)_{*,q}, d_m)$ . Le terme  $E_{p,q}^2$  est alors

$$E_{p,q}^2 = H_q(\Lambda_* \text{Harr}(A)^p, d_\ell).$$

□

## 5 Exemples

Dans cette partie on donne quelques exemples de calculs de l'homologie de Gerstenhaber  $H\mathcal{G}_*(A)$  pour certaines  $\mathcal{G}$ -algèbres  $A$ .

Commençons par les algèbres de Gerstenhaber libres. La proposition suivante est un résultat de Getzler-Jones [7] et Markl [15].

**Proposition 5.1:** *Soit  $V$  un espace vectoriel gradué et  $A = \mathcal{G}(V)$  l'algèbre de Gerstenhaber libre sur  $V$ . Alors,  $H\mathcal{G}_0(A) = V$  et  $H\mathcal{G}_p(A) = 0$  pour  $p \geq 1$ .*

DÉMONSTRATION: On utilise la suite spectrale du théorème 4.3. On a

$$\begin{aligned} E_{p,q}^2 &= H_q(\Lambda_* \text{Harr}(A)^p, d_\ell) \\ &= H_q(\Lambda_* \text{Harr}(\mathcal{G}(V))^p, d_\ell) \end{aligned}$$

On a vu, d'après lemme 2.2, que  $\mathcal{G}(V)$  est égal à

$$\bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(\text{Lie}(V[1]))[-n].$$

En particulier  $\mathcal{G}(V)$  s'écrit sous la forme d'une algèbre commutative libre  $k[W]$  (où  $W$  est l'algèbre de Lie libre sur  $V$  à un décalage de degré près). On obtient alors (par koszulité des algèbres commutatives)

$$\text{Harr}(\mathcal{G}(V))^p = \text{Lie}(V).$$

On en conclut que  $E_{*,*}^2$  est l'homologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie libre sur  $V$ . Par conséquent (par koszulité des algèbres de Lie)  $E_{*,*}^2$  est concentré en degré 0 et la suite spectrale dégénère. On obtient alors  $H\mathcal{G}(A)_* = 0$  si  $*$  > 0 et  $V$  sinon.  $\square$

*Remarque:* La définition du complexe  $(C\mathcal{G}(A), d)$  (et en particulier la condition  $d^2 = 0$ ) ne nécessite pas que l'opérade  $\mathcal{G}$  soit de Koszul (mais juste qu'elle soit binaire quadratique). C'est aussi le cas pour le lemme 4.2 et le théorème 4.3. Les calculs de la démonstration précédente sont donc indépendants de la koszulité de  $\mathcal{G}$ . Précisément, ils assurent que l'application  $(\mathcal{G}^+(\mathcal{G}), d) \rightarrow (k, 0, \dots)$  est un quasi-isomorphisme, *i.e.*, par définition, que l'opérade  $\mathcal{G}$  est de Koszul. En particulier, cette démonstration redonne une preuve élémentaire de la Koszulité de l'opérade  $\mathcal{G}$ .

Supposons maintenant que  $\mathfrak{g}$  soit une algèbre de Lie. On peut lui associer de manière canonique une algèbre de Gerstenhaber comme suit. Soit  $X(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}[-1])$  l'algèbre symétrique sur la désuspension de  $\mathfrak{g}$ , munie du produit de concaténation. La structure d'algèbre de Lie sur  $\mathfrak{g}$  s'étend de manière unique à  $X(\mathfrak{g})$  et l'identité de Leibniz est facilement vérifiée. On dit que  $X(\mathfrak{g})$  est l'algèbre de Gerstenhaber libre sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Le foncteur  $\mathfrak{g} \mapsto X(\mathfrak{g})$  est l'adjoint à gauche du foncteur oubli (avec un décalage de degré) de la catégorie des algèbres de Gerstenhaber vers la catégorie des algèbres de Lie.

**Proposition 5.2:** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie,  $X(\mathfrak{g})$  l'algèbre de Gerstenhaber associée et  $H_*^{Lie}(\mathfrak{g})$  l'homologie de Chevalley-Eilenberg de  $\mathfrak{g}$  à coefficients triviaux. Alors, on a

$$H\mathcal{G}_*(X(\mathfrak{g})) = H_*^{Lie}(\mathfrak{g}).$$

DÉMONSTRATION: Par définition, l'algèbre  $X(\mathfrak{g})$  est une algèbre libre pour la multiplication commutative. Par conséquent, on a

$$\text{Harr}_n(X(\mathfrak{g})) = \text{Harr}_n(S(\mathfrak{g}[-1])) = \mathfrak{g}[-1]$$

si  $n = 0$  et 0 sinon. On en déduit que le terme  $E_{*,*}^2$  de la suite spectrale du théorème 4.3 est concentré en degré  $(0, *)$ . Donc la suite dégénère et

$$\begin{aligned} E_{0,q}^2 &= H_q(\Lambda^*(\mathfrak{g}[-1])[1], d_\ell) \\ &= H_q^{Lie}(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

car, sur la partie de degré  $(0, *)$ , la différentielle  $d_\ell$  est exactement la différentielle de Chevalley-Eilenberg (*cf.* la remarque consécutive au lemme 4.2).

□

*Exemple:* Si  $R$  est une extension finie de  $k$ , la cohomologie de Hochschild  $H^*(R, R)$  de la  $k$ -algèbre  $R$  à valeurs dans le bimodule  $R$  est une algèbre de Gerstenhaber sur le corps  $R$ . Précisément, d'après le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg, on a  $H^*(R, R) = S(A[1])$  où  $A$  est le  $R$ -espace vectoriel gradué  $A = \text{Der}(R, R)[-1]$ . La structure d'algèbre de Lie sur  $S(A[1])$  est induite par le crochet de Schouten. En particulier la proposition 5.2 assure que  $H\mathcal{G}_*(HH^*(R, R)) = H_*^{Lie}(A)$ . Cette méthode s'applique aussi au cas où  $R$  est une  $k$ -algèbre affine lisse.

Considérons maintenant les algèbres de Gerstenhaber ayant une opération triviale et calculons leur homologie. Il revient au même de calculer l'homologie de Gerstenhaber d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , vue comme  $\mathcal{G}$ -algèbre avec multiplication nulle, et l'homologie de Gerstenhaber d'une algèbre commutative  $A$ , vue comme  $\mathcal{G}$ -algèbre avec crochet nul.

Précisément, il existe un unique crochet de Lie de degré  $-1$  sur la cogèbre  $\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}[1]^{\otimes n}$  qui prolonge le crochet de  $\mathfrak{g}$  (*cf.* [3]). On note  $\text{LT}(\mathfrak{g})$  l'algèbre de Lie associée. On munit alors  $\mathfrak{g}[-1]$  d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber avec multiplication triviale. De même, on peut considérer l'algèbre commutative  $A$  comme une  $\mathcal{G}$ -algèbre avec crochet de Lie nul.

**Proposition 5.3:** *Soient  $(\mathfrak{g}, \ell)$  une algèbre de Lie et  $(A, m)$  une algèbre commutative. On a*

$$H\mathcal{G}_*(\mathfrak{g}[-1], 0, \ell) = H_*^{Lie}(\text{LT}(\mathfrak{g})), \quad H\mathcal{G}_*(A, m) = \Lambda^*(\bigoplus_{n \geq 0} H\text{arr}_n(A)).$$

**DÉMONSTRATION:** On utilise encore la suite spectrale du théorème 4.3. Pour l'algèbre  $(\mathfrak{g}[-1], 0, \ell)$ , la multiplication étant triviale, il en résulte que le terme  $E_{*,*}^1$  est simplement  $\text{LT}(\mathfrak{g})$ . On vérifie facilement que la différentielle  $d_\ell$  est la différentielle de Chevalley-Eilenberg de  $\text{LT}(\mathfrak{g})$ . Le raisonnement est analogue pour l'algèbre  $(A, m, 0)$ . □

## 6 Algèbres de Poisson à homotopie près

Les méthodes des parties précédentes s'appliquent aussi sans peine aux algèbres de Poisson. Conservons les notations de la partie 2.

Il est bien connu que l'opérade décrivant les algèbres de Poisson est l'opérade

$$\mathcal{P} = \mathcal{O}p(\ell\check{k} \oplus mk, R)$$

où  $R = R_2 \oplus R_1 \oplus R_0$  avec

$$\begin{aligned} R_2 &= \text{Vect}[\ell(\ell, 1)\underline{x} + \ell(\ell, 1)\underline{y} + \ell(\ell, 1)\underline{z}] \\ R_1 &= \text{Vect}[\ell(m, 1)\underline{x} + m(\ell, 1)\underline{y} + m(\ell, 1)\underline{z}] \\ &\quad \oplus \text{Vect}[\ell(m, 1)\underline{y} + m(\ell, 1)\underline{z} + m(\ell, 1)\underline{x}] \\ &\quad \oplus \text{Vect}[\ell(m, 1)\underline{z} + m(\ell, 1)\underline{x} + m(\ell, 1)\underline{y}] \\ R^{(0)} &= \text{Vect}[m(m, 1)\underline{x} - m(m, 1)\underline{y}] \\ &\quad \oplus \text{Vect}[m(m, 1)\underline{x} - m(m, 1)\underline{z}]. \end{aligned}$$

On sait que l'algèbre de Poisson libre  $\mathcal{P}(A)$  est le gradué associé à l'algèbre tensorielle  $\bigoplus A^{\otimes n}$  muni du produit sh induit par les « shuffles » et que sa coopérade duale est  $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{P}_1^*$ .

On notera dans toute la suite  $X \odot X$  le produit symétrique gradué d'un espace vectoriel.

**Lemme 6.1:** *La  $\mathcal{P}^\perp$ -coalgèbre libre sur un espace vectoriel gradué  $A$  est donnée par*

$$\mathcal{P}^\perp(A) = S^*(\text{Ha}_*(A)[*]) = \bigoplus_{p_1 \leq \dots \leq p_n} (\text{Ha}_{p_1}(A)[p_1] \odot \dots \odot \text{Ha}_{p_n}(A)[p_n])[-1].$$

Le coproduit  $\delta_m$  est donné, pour  $x_i \in A^{\otimes p_i}$  ( $i = 1 \dots n$ ), par

$$\delta_m(x_1 \odot \dots \odot x_n) = \sum \varepsilon'(\sigma) (x_{\sigma(1)}) \odot \dots \odot (x_{\sigma(i)} \otimes x_{\sigma(i+1)} \odot \dots \odot x_{\sigma(n)})$$

où la somme se fait sur tous les  $(i, n-i)$ -shuffles  $\sigma$ .

Le cocrochet  $\delta_\ell$  est lui donné par

$$\begin{aligned} \delta_\ell(x_1 \odot \dots \odot x_n) = \sum \varepsilon'(\sigma) \beta_k x_{\sigma(1)} \odot \dots \odot x_{\sigma(i)} \odot (v_1^k, \dots, v_j^k) \otimes (v_{j+1}^k, \dots, v_{p_k}^k) \\ \odot x_{\sigma(i+1)} \odot \dots \odot x_{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Dans la formule précédente, la somme est étendue à tous les entiers  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq j \leq p_k$  et toutes les permutations  $\sigma$  qui fixent  $k$  et telle que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(i)$  et  $\sigma(i+1) < \dots < \sigma(n)$  ( $1 \leq i \neq k \leq n$ ), i.e.  $\sigma$  est un  $(i, n-1-i)$ -shuffle sur  $1, \dots, n-k$ . On a noté  $x_k = (v_1^k, \dots, v_j^k, v_{j+1}^k, \dots, v_{p_k}^k)$ . Le signe  $\beta_k$  est donné par

$$\beta_k = (-1)^{(p_k \perp j)(|v_1^k| + \dots + |v_j^k|)}.$$

DÉMONSTRATION: La démonstration est analogue à celle du lemme 3.3. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\perp(A) &= \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}^\perp(n) \otimes A^{\otimes n} \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{P}^*)_1(n) \otimes A^{\otimes n}. \end{aligned}$$

On obtient, en reprenant les notations du lemme 3.3,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\perp(A) &= \bigoplus_{0 \leq j \leq n} ((m^*)^{\circ j} k \otimes_{S_j} \bigoplus_{p_1 + \dots + p_j = n} (\text{Lie}^*(p_1) \otimes \text{sgn}_{p_1}[p_1]) \otimes \dots \\ &\quad \dots \otimes (\text{Lie}^*(p_j) \otimes \text{sgn}_{p_j}[p_j])) \otimes A^{\otimes n}[-1]. \\ &= \bigoplus_{p_1 \leq \dots \leq p_n} (\text{Ha}_{p_1}(A)[p_1] \odot \dots \odot \text{Ha}_{p_n}(A)[p_n])[-1]. \end{aligned}$$

□

Nous en déduisons le théorème suivant qui décrit les algèbres de Poisson à homotopie près.

**Théorème 6.2:** *Une algèbre de Poisson à homotopie près est la donnée d'un espace vectoriel gradué muni d'une famille d'applications*

$$\mu_{p_1, \dots, p_n} : A^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes A^{\otimes p_n} \rightarrow A$$

de degré  $2 - (p_1 + \dots + p_n)$  pour tout  $n, p_1, \dots, p_n \geq 1$ , telles que

i) pour tout  $x_1, \dots, x_n$  dans  $A^{\otimes p_1}, \dots, A^{\otimes p_n}$  et  $\sigma \in S_n$ , on ait

$$\mu_{p_1, \dots, p_n}(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon'(\sigma) \mu_{p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)});$$

ii) pour tout  $x_1, \dots, x_{i\pm 1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , l'application

$$\begin{aligned} A^{\otimes p_i} &\rightarrow A \\ y &\mapsto \mu_{p_1, \dots, p_n}(x_1, \dots, x_{i\pm 1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

s'annule sur les « shuffles » non triviaux;

iii) l'unique codérivation  $d$  de  $\mathcal{P}^\perp(A)$  étendant  $\sum \mu_{p_1, \dots, p_n}$  vérifie  $d^2 = 0$ .

La condition iii) du théorème s'explique de la manière suivante. Soient  $x_1 = (v_1^1, \dots, v_{p_1}^1), \dots, x_n = (v_1^n, \dots, v_{p_n}^n)$  des éléments de  $A^{\otimes p_1}, \dots, A^{\otimes p_n}$  respectivement. La condition iii) est équivalente à

$$\sum_{\substack{(s, n-s)\text{-unshuffles} \\ s = 1..n}} \sum_{\substack{q_1 + r_1 = p_{\sigma(1)+1} \\ q_2 + r_2 = p_{\sigma(2)} \\ \dots \\ q_n + r_n = p_{\sigma(n)}}} \sum_{\substack{\ell_1 + q_1 \leq p_{\sigma(1)} \\ \dots \\ \ell_s + q_s \leq p_{\sigma(s)}}} \pm P_q^\ell(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(s)}) = 0$$

avec  $q_{s+1} = \dots = q_n = 0$  et

$$\begin{aligned} P_q^\ell(x_1, \dots, x_s) = \mu_{r_1, \dots, r_n}((v_1^1, \dots, v_{\ell_1}^1, \mu_{q_1, \dots, q_s}(v(1), \dots, v(s)), v_{\ell_1+q_1+1}^1, \dots, v_{p_1}^1) \otimes \widehat{x}_2 \dots \\ \dots \otimes \widehat{x}_s \otimes x_{s+1} \dots \otimes x_n). \end{aligned}$$

Dans la formule précédente on a noté  $\widehat{x}_j$  ( $k = 1..s$ ) le  $r_j$ -tenseur

$$\widehat{x}_{j_k} = (v_1^{p_j}, v_2^{p_j}, \dots, v_{\ell_j}^{p_j}, v_{\ell_j+q_j+1}^{p_j}, \dots, v_{p_j}^{p_j}).$$

Pour  $r = 1, \dots, s$ , on a noté  $v(r)$  l'élément de  $A^{\otimes q_r}$  (qui dépend aussi de  $i_r, q_r$ ) suivant

$$v(r) = (v_{\ell_r+1}^r, \dots, v_{\ell_r+q_r}^r).$$

En particulier  $\widehat{x}_k = x_k$  où on a omis le tenseur  $v(k)$  dans la formule.

Le signe  $\pm$  est donné par la formule

$$\pm = (-1)^{(q_1 + \dots + q_s)(r_2 + \dots + r_n + |v_1^{\sigma(1)}| + \dots + |v_{\ell_1}^{\sigma(1)}| + p_{\sigma(1)} + \ell_{\sigma(1)}) + \ell_{\sigma(1)}} \varepsilon'(\tau)$$

où  $\tau$  est la permutation associée au réindiciage de  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ .

DÉMONSTRATION: L'opérade  $\mathcal{P}$  étant de Koszul, une structure de  $\mathcal{P}$ -algèbre à homotopie près sur un espace vectoriel  $A$  est déterminée par une codifférentielle sur  $\mathcal{P}^\perp(A)$ . Le lemme 6.1 et un calcul analogue à celui du théorème 3.4 permettent de conclure.  $\square$

*Explicitations en basse dimension :*

L'application  $\mu_1$  est de degré 1 et, d'après la propriété *iii*) du théorème 6.2, vérifie  $\mu_1^2 = 0$ . C'est donc une différentielle sur  $A$ . L'application  $\mu_2 : A^{\otimes 2} \rightarrow A$  est de degré  $2 - 2 = 0$ . La propriété *ii*) assure que  $\mu_2$  est une opération commutative (de même que pour l'opération  $m_2$  de 3.4). De plus, la condition *iii*) pour des éléments de  $A^{\otimes n}$  implique encore que  $(A, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots)$  définit une structure d'algèbre commutative à homotopie près.

De même, l'opération  $\mu_{1,1} : A \otimes A \rightarrow A$  est de degré 0 et la propriété *i*) assure que  $\mu_{1,1} : A \otimes A \rightarrow A$  est antisymétrique. On peut encore vérifier que la condition *iii*) définit une structure d'algèbre de Lie à homotopie près sur  $(A, \mu_1, \mu_{1,1}, \mu_{1,1,1}, \dots)$ .

On a également

$$\begin{aligned} & \mu_1(\mu_{1,2}(x, y, z)) + \mu_{1,2}(\mu_1(x, y, z)) + \mu_{1,1}(x, \mu_2(y, z)) \\ & - (-1)^{|z|(|x|+|y|)} \mu_2(z, \mu_{1,1}(x, y)) - (-1)^{|y|(|x|)} \mu_2(y, \mu_{1,1}(x, z)) = 0 \end{aligned}$$

où on a noté  $\mu_1(x, y, z)$  la différentielle induite par  $\mu_1$  sur  $A \otimes (A^{\otimes 2})$ . En particulier  $\mu_{1,2}$  fournit une homotopie pour la relation de Leibniz du crochet  $\mu_{1,1}$  et du produit  $\mu_2$ .  $\square$

*Remarque:* On peut appliquer les méthodes de la partie 4 pour définir une homologie naturelle des algèbres de Poisson. On trouve alors le complexe construit par Fresse [3] 3.1, [4]. En particulier, l'analogue de la suite spectrale 4.3 est la suite spectrale du théorème 0.2 de [3]. De plus, le premier terme de cette suite spectrale s'identifie en terme de décompositions du complexe de Hochschild par les  $\lambda$ -opérations, *cf.* [3], [4].

Les calculs de la partie 5 s'étendent sans problème au cadre des algèbres de Poisson. Par exemple, pour une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , l'algèbre de Poisson libre associée est  $P(\mathfrak{g}) = S^*(\mathfrak{g})$  et on a

$$HP_*(P(\mathfrak{g})) = H_*^{Lie}(\mathfrak{g}).$$

Ayant déterminé la structure des algèbres de Poisson et de Gerstenhaber à homotopie près, il est facile d'exhiber la structure des  $n$ -algèbres à homotopie près.

Rappelons (*cf.* [7]) que pour un entier  $n \geq 0$ , une  $n$ -algèbre est la donnée d'un espace vectoriel gradué  $A$  muni d'un produit commutatif gradué  $m : A \otimes A \rightarrow A$  et d'un crochet  $[\ ; \ ] : A_i \otimes A_j \rightarrow A_{i+j+n}$  de degré  $n$  qui induit une structure d'algèbre de Lie sur  $A[n]$ . On demande, en plus, que le crochet et le produit vérifie la condition de Leibniz suivante, pour tout  $x, y, z \in A$  :

$$[x; m(y, z)] = m([x; y], z) + (-1)^{(|x|+n)|y|} m(y, [x; z]).$$

**Théorème 6.3:**

- i) Si  $n$  est pair, une structure de  $n$ -algèbre à homotopie près est donnée par une famille d'applications  $\mu_{p_1, \dots, p_k} : A^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes A^{\otimes p_k} \rightarrow A$  de degré  $2 + n - (p_1 + \dots + p_k + nk)$  satisfaisant les relations i), ii) et iii) du théorème 6.2.
- ii) Si  $n$  est impair, une structure de  $n$ -algèbre à homotopie près est donnée par une famille d'applications  $m_{p_1, \dots, p_k} : A^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes A^{\otimes p_k} \rightarrow A$  de degré  $2 + n - (p_1 + \dots + p_k + nk)$  satisfaisant les relations i), ii) et iii) du théorème 3.4.

DÉMONSTRATION: Le raisonnement est analogue à celui utilisé pour démontrer les théorèmes 3.4 et 6.2. On obtient alors qu'une structure de  $n$ -algèbre à homotopie près, sur un espace vectoriel gradué  $A$ , est uniquement déterminée par une famille d'applications

$$d_{p_1, \dots, p_k} : A^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes A^{\otimes p_k} \rightarrow A[2 + n - nk - p_1 \dots - p_k].$$

Pour déterminer les signes apparaissant dans les relations que doivent vérifier ces opérations, il suffit de distinguer deux cas selon la parité de  $n$ . Si  $n$  est pair, alors on retrouve le cas des algèbres de Poisson à homotopie près (qui correspondent à  $n = 0$ ). Si  $n$  est impair, on retrouve les relations définissant les algèbres de Gerstenhaber à homotopie près (qui correspondent à  $n = 1$ ).

□

## Références

[1] F.R. Cohen. The homology of  $\mathcal{C}_{n+1}$  spaces,  $n \geq 0$ . In *The homology of iterated loop spaces*, pages 207–351. Springer-Verlag, 1976.

- [2] P. Deligne. Letter to Stasheff, Gerstenhaber, May, Schechtman, Drinfeld. May 17, 1993.
- [3] B. Fresse. Homologie de Quillen pour les algèbres de Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(9):1053–1058, 1998.
- [4] B. Fresse. Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson. 1998. Prépublication.
- [5] M. Gerstenhaber. The cohomology structure of an associative ring. *Ann. of Math*, 78(2):267–288, 1963.
- [6] M. Gerstenhaber and A. Voronov. Homotopy  $G$ -algebras and moduli space operad. *Internat. Math. Res. Notices*, 3:141–153, 1995.
- [7] E. Getzler and J.D.S. Jones. Operads, homotopy algebras and iterated loop spaces. hep-th/9403055.
- [8] V. Ginzburg and M. Kapranov. Koszul duality for operads. *Duke Math. J*, 76(1):203–272, 1994.
- [9] V. Hinich. Tamarkin’s proof of Kontsevich formality conjecture. *Forum Math.*, 15(4):591–614, 2003.
- [10] T. Kadeishvili. Measuring the noncommutativity of DG-algebras. prépublication.
- [11] M. Kontsevich. Operads and motives in deformation quantization. *Lett. Math. Phys.*, 48(1):35–72, 1999.
- [12] M. Kontsevich and Y. Soibelman. Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture. In *Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I*, volume 21. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.
- [13] T. Lada and J. Stasheff. Introduction to SH Lie algebras for physicists. *Internat. J. Theoret. Phys*, 32(7):1087–1103, 1993.
- [14] M. Markl. Homotopy Algebras are Homotopy Algebras. math.AT/9907138.
- [15] M. Markl. Distributive laws and Koszulness. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46(2):307–323, 1996.
- [16] M. Markl. Models for operads. *Comm. Algebra*, 24(4):1471–1500, 1996.
- [17] J.P. May. Operads, algebras and modules. In *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995)*, volume 202. Amer. Math. Soc., Providence.

- [18] J. Stasheff. Homotopy associativity of  $h$ -spaces I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:275–292, 293–312, 1963.
- [19] D. Tamarkin. Another proof of Kontsevich formality conjecture. [math.QA/9803183](#).
- [20] D. Tamarkin and B. Tsygan. Noncommutative differential calculus, homotopy BV algebras and formality conjectures. *Methods Funct. Anal. Topology*, 6(2):85–100, 2000.
- [21] A. Voronov. Homotopy Gerstenhaber algebras. In *Conférence Moshé Flato 1999, Vol. II*, volume 22. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

GRÉGORY GINOT  
UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR-C.N.R.S.  
INSTITUT DE RECHERCHE  
MATHÉMATIQUE AVANCÉE  
7, RUE RENÉ DESCARTES  
67084 STRASBOURG  
FRANCE  
[ginot@math.u-strasbg.fr](mailto:ginot@math.u-strasbg.fr)