SuP Galilée
L'école d'ingénieurs de
l'Institut Galilée

Spécialité MACS 1ère année

Equations différentielles
Etude mathématique et numérique

L. Halpern

INSTITUT GALILEE, 99 avenue Jean-Baptiste-Clément 93430 VILLETANEUSE . Janvier 2016

Table des matières

Chapitre 2

Equations du premier ordre réelles scalaires

Nous considérons ici uniquement des équations sous forme normale, c'est-à-dire définies comme suit. Soit

$$(t, y) \to f(t, y) \tag{2.1}$$

une fonction définie et continue dans une partie D de $\mathbb{R}^2$. Une **solution** de l'équation différentielle (ordinaire) du premier ordre

$$y' = f(t, y) \tag{2.2}$$

sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction réelle

$$t \to y(t) \tag{2.3}$$

définie, continue et dérivable dans I telle que

$$\begin{cases} \forall t \in I, & (t, y(t)) \in D \\ \forall t \in I, & y'(t) = f(t, y(t)) \end{cases} \tag{2.4}$$

Les **courbes intégrales** sont l'ensemble des points $(t, y(t))$ satisfaisant (2.4), *i.e.* telles que **la pente de la tangente** au point $(t, y(t))$ est égale à $f(t, y(t))$. Il y a en général une infinité de solutions au problème. Pour sélectionner une solution, il faut se donner plus d'informations : la **condition initiale** y_0, c'est-à-dire qu'on cherche la solution de (2.4) qui vérifie de plus

$$y(0) = y_0 \tag{2.5}$$

Les équations (2.4) et (2.5) constituent le **problème de Cauchy**[1] . A chaque donnée de Cauchy y_0 correspond une et une seule solution. Les courbes de la figure suivante sont obtenues de 3 façons différentes.

1. Louis-Augustin Cauchy (1789-1857), professeur à l'Ecole Polytechnique, a établi les fondations de l'analyse rigoureuse telle que nous la connaissons aujourd'hui. Il a donné le premier théorème d'existence de solutions d'équations différentielles (parmi bien d'autres choses, comme par exemple les calculs de la variable complexe)

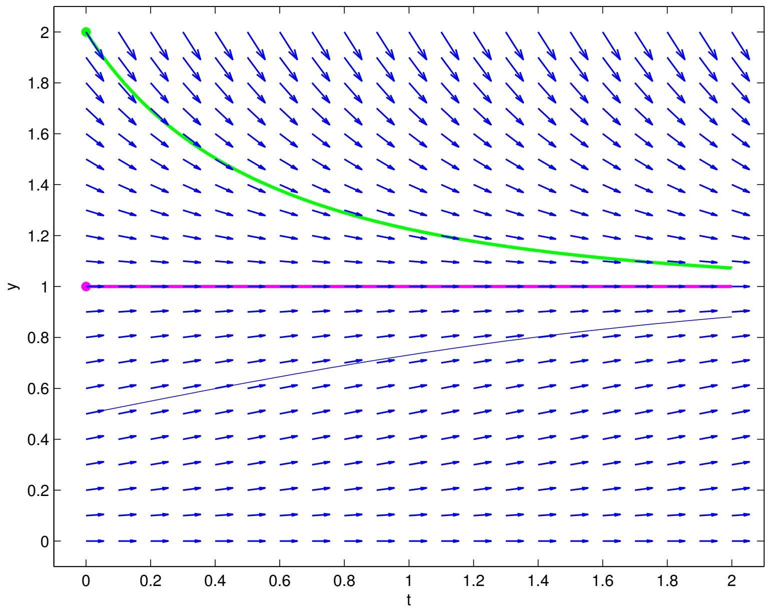


FIGURE 2.1 – Deux courbes intégrales de $y' = y(1-y)$ ($y_0 = 1$ et $y_0 = 2$) et champ de vecteur tangent

1. Avec `Maple`

```
with(DEtools, DEplot):
ode := diff(y(t), t) = y(t)*(1-y(t));
ivs := [y(0) = 1, y(0) = 2]
#les dessins
DEplot(ode, y(t), t = 0 .. 2, ivs, linecolor = blue)
#la solution générale
dsolve(ode)
# la solution qui vaut 1 en 0
ics := y(0) = 1
sol1 := dsolve({ics, ode})
         sol1 := y(t) = 1
# la solution qui vaut 2 en 0
ics := y(0) = 2
sol2 := dsolve({ics, ode})
         sol2 := y(t) = -2/(-2+exp(-t))
```

2. Calcul à la main

$$\frac{dy}{y(1-y)} = dt$$

$$\text{Décomposition en éléments simples} \quad \frac{dy}{y} + \frac{dy}{1-y} = dt$$

$$\text{Identification} \quad d(\ln(y)) - d(\ln(1-y)) = dt$$

$$\text{Regroupement} \quad d\left(\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)\right) = dt$$

$$\text{Intégration} \quad \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = t + \alpha$$

$$\text{Exponentiation} \quad \frac{y}{1-y} = e^{t+\alpha}$$

$$\text{Explicitation} \quad y = e^{t+\alpha}\,(1-y)$$

$$\text{Explicitation} \quad y(1+e^{t+\alpha}) = e^{t+\alpha}$$

$$\text{Division + Changement de constante} \quad y = \frac{Ce^t}{1+Ce^t} = \frac{1}{1/Ce^{-t}+1}$$

$$\text{Changement de constante} \quad y = \frac{1}{De^{-t}+1}$$

$$sol1 \longleftrightarrow D = 0, \quad sol1 = 1$$

$$sol2 \longleftrightarrow D = 1, \quad sol2 = \frac{1}{e^{-t}+1}$$

3. Calcul numérique avec le script matlab

```
clear all;close all
% solution exacte
t=(0:.01:2);
y0=2;
yy2=y0*exp(t)./(1-y0+y0*exp(t));
hold on
plot(t,yy2,'g',0,y0,'*g','Linewidth',1);
plot(t,ones(length(t),1),'k')
f=@(t,y) y.*(1-y);
pause

% schema d'Euler
te=(0:0.2:2);
h=te(2)-te(1);
ye(1)=y0;
for j=1:length(te)-1
    ye(j+1)= ye(j)+h*f(te(j),ye(j));
end
plot(te,ye,'m-o','Linewidth',2);
pause
% schema ode45 de matlab

[tt,yy]=ode45(f,[0 2],2);
hold on
plot(tt,yy,'b*','Linewidth',2);
```

```
hold off
xlabel('t')
ylabel('y')
axis([-0.1 2.1 -0.1 2.1])
```

Remarque 1. ode45 is based on an explicit Runge-Kutta (4,5) formula, the Dormand-Prince pair. It is a one-step solver : in computing $y(t_n)$, it needs only the solution at the immediately preceding time point, $y(t_{n-1})$. In general, ode45 is the best function to apply as a first try for most problems. http://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html

On dit que le problème de Cauchy est **bien posé** sur l'intervalle I s'il existe une et une seule fonction $t \mapsto y(t)$ satisfaisant aux équations (2.4),(2.5), et dépendant des données (f, y_0) de façon continue.

Si on intègre l'équation différentielle on obtient

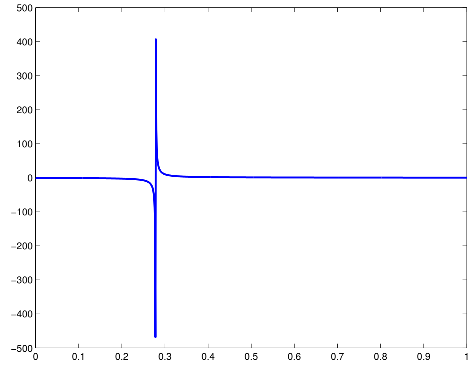
$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds \tag{2.6}$$

forme équivalente en général et qui peut être utile.

Il peut arriver que la solution puisse être calculée explicitement. Par exemple une équation linéaire, ou encore une équation de Bernoulli, comme

$$ty' + y = y^2 \ln t$$

Traçons par exemple sans précaution en matlab la courbe intégrale pour $a = 1$.



```
a=1;
x=0:0.001:1
y=1./(a*x+log(x)+1);
plot(x,y,'b','Linewidth',2)
```

FIGURE 2.2 – Equation de Bernoulli

2.1 Notion d'existence, unicité, stabilité

2.1.1 Unicité locale : solutions ϵ- *approchées*

Nous allons utiliser une méthode constructive qui fait appel au plus ancien schéma d'approximation : le schéma d'Euler. Nous nous placerons ici dans le cas simplifié ou f est lipschitzienne par rapport à y.

FIGURE 2.3 – Rudolf Lipschitz, 1832-1903

Définition 1 (Fonctions lipschitziennes)**.** La fonction φ, définie dans une partie B de $\mathbb{R}^n$ et continue, est dite lipschitzienne de constante de Lipschitz L si

$$\forall y_1 \in B, \forall y_2 \in B, |\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2| \tag{2.7}$$

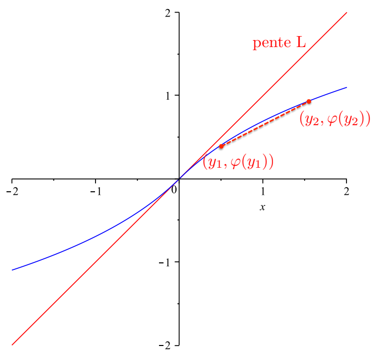


FIGURE 2.4 – Représentation

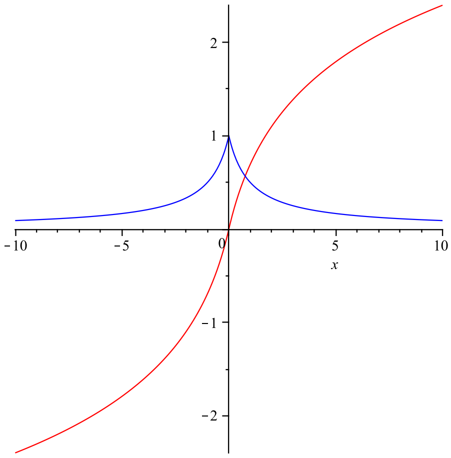


FIGURE 2.5 – Fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (rouge) et sa dérivée (bleu)

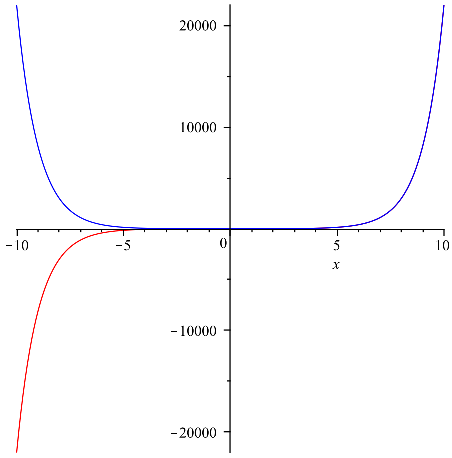


FIGURE 2.6 – Fonction NON lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (rouge) et sa dérivée (bleu)

Exercice 1. Si φ' est continue par morceaux et bornée en valeur absolue par L , alors f est lipschitzienne de constante de Lipschitz L.

Une fonction f dérivable sur un intervalle réel est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée.

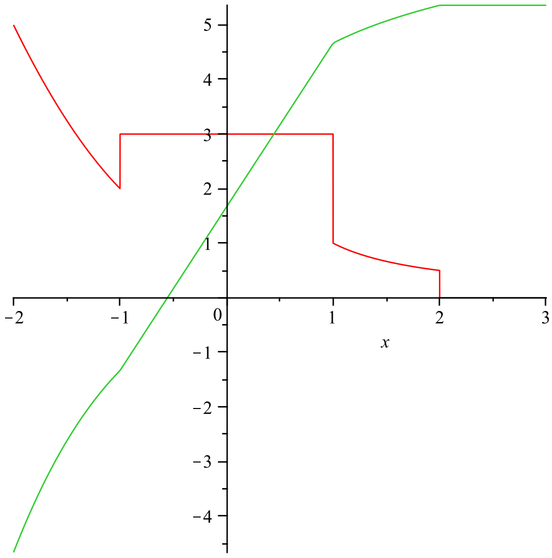
Définition 2. La fonction $(t, y) \to f(t, y)$, définie dans D et continue, est dite lipschitzienne par rapport à y de constante de Lipschitz L si

$$\forall (t, y_1) \in D, \forall (t, y_2) \in D, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2| \tag{2.8}$$

Nous définissons maintenant la notion de solution ϵ- *approchée* :

Définition 3 (solutions ϵ- *approchées*)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, ε un nombre réel strictement positif. Une fonction u, définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que u' soit continue par morceaux, est une solution ϵ- *approchée* si

$$\begin{cases} \forall t \in I, \quad (t, u(t)) \in D \\ \forall t \in I, t \text{ non point de discontinuité de } u', |u'(t) - f(t, u(t))| \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{2.9}$$




```
> eq1 := piecewise(−1 > x, x^2+1, `and`(x > −1, x < 1), 3, `and`(x > 1, x < 2), 1/x)
> eq2 := int(eq1, x)
> plot([eq1, eq2], x = −2 .. 3)
```

FIGURE 2.7 – Illustration de la régularité dans la définition avec `maple`. En rouge u', en vert u

Nous allons établir maintenant l'inégalité fondamentale de comparaison entre 2 solutions ϵ- *approchées* :

Proposition 1 (Comparaison des solutions ϵ- *approchées*)**.** *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et lipschitzienne par rapport à y. Soit u_1 une solution ϵ_1- approchée et u_2 une solution ϵ_2- approchée, définies sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$.*

$$\text{Si il existe } t_0 \in I, |u_1(t_0) - u_2(t_0)| \leqslant \delta, \tag{2.10}$$

$$\text{alors pour tout } t \in I, |u_1(t) - u_2(t)| \leqslant \delta e^{L(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1) \tag{2.11}$$

avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, et où L est la constante de Lipschitz associée à f.

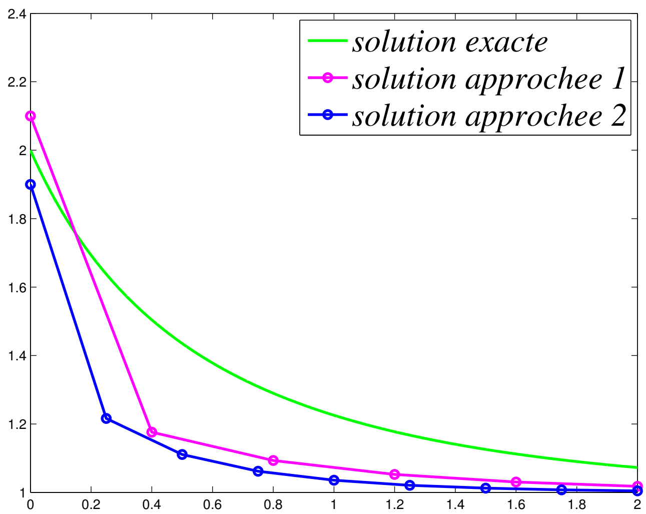


FIGURE 2.8 – Deux solutions ϵ- *approchées*

La démonstration s'appuie sur les deux résultats suivants

Théorème 1 (Théorème de la moyenne). *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, g positive ou nulle. Si*

$$\forall x \in [a,b], m \leqslant f(x) \leqslant M, \tag{2.12}$$

alors

$$\forall x \in [a,b], m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx \tag{2.13}$$

Théorème 2 (Lemme de Gronwall). *Soient φ, ψ et W trois fonctions continues par morceaux sur l' intervalle $[0,a]$,positives ou nulles sur $[0,a]$, telles que*

$$W(x) \leqslant \varphi(x) + \int_0^x W(s)\psi(s)\,ds, \tag{2.14}$$

sauf aux points de discontinuité. Alors, sauf aux points de discontinuité, on a

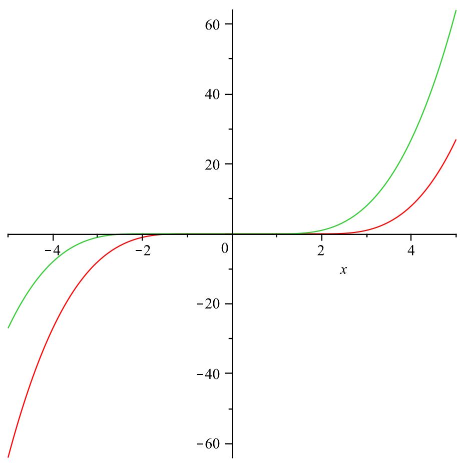
$$W(x) \leqslant \varphi(x) + \int_0^x \varphi(s)\psi(s)\left[\exp\left(\int_s^x \psi(\sigma)d\sigma\right)\right]\,ds, \tag{2.15}$$

De cette estimation de base on peut déduire un résultat d'**unicité locale** :

Théorème 3 (Unicité locale). *Supposons f continue, lipschitzienne par rapport à y dans le domaine D. Soit (t_0, y_0) un point de D. Si $y(t)$ (définie sur un intervalle I contenant t_0),et $\tilde{y}(t)$ (définie sur un intervalle $\tilde{I}$ contenant t_0) sont deux solutions de (2.4) avec la même condition initiale $y(t_0) = \tilde{y}(t_0) = y_0$, alors y et $\tilde{y}$ coincident sur $I \cap \tilde{I}$.*

Remarque 2. Si f n'est pas lipschitzienne par rapport à y, on n'a pas forcément unicité, comme le montre l'exemple de l'équation

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}} \tag{2.16}$$




```
> eq := piecewise(a > x, (x−a)^3, `
   and`(x > a, x < b), 0, x > b, (x
   −b)^3)
```

FIGURE 2.9 – Nonunicité dans le théorème avec `maple`.

2.1.2 Existence locale : méthode de Cauchy-Lipschitz

On considère toujours un domaine D du plan, où on suppose que f est continue et même bornée, on note M sa borne supérieure. Alors on sait que f est uniformément continue et donc

$$\forall \epsilon, \exists \delta, \forall (t_1, y_1) \in D, \forall (t_2, y_2) \in D, |t_1 - t_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta \implies |f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)| < \epsilon$$

Donnons nous un $\epsilon > 0$ auquel nous associons le δ précédent. On peut alors introduire une classe particulière de solutions ϵ- *approchées* : les fonctions affines par morceaux. Soient un point de D, (t_1, y_1), et la fonction affine sur $I = [t_1, t_1 + h]$ passant par y_1 en t_1, $u(t) = y_1 + (t - t_1) f(t_1, y_1)$. A quelle condition sur h u est-elle une solution ϵ- *approchée* ? Il faut bien sûr d'abord que le segment soit dans D. Ensuite que $|u'(t) - f(t, u(t)| < \epsilon$ sur I. Pour cela il suffit que

$$h \leqslant \delta, \quad Mh \leqslant \delta.$$

Soit (t_0, y_0) un point de D. On se donne un **pas de discrétisation** h suffisamment petit, c'est-à-dire que $h \leqslant min(\delta, \delta/M)$. et une suite d'instants $t_j = t_0 + jh$, où j décrit $\mathbb{Z}$. On définit alors une suite de réels u_j par u_0 et la relation de récurrence

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j) \tag{2.17}$$

La fonction u affine par morceaux est maintenant définie par $u(t_j) = u_j$, *i.e.*

$$u(t) = f(t_j, u_j)(t - t_j) + u_j \text{ sur } [t_j, t_{j+1}] \tag{2.18}$$

On peut procéder ainsi tant que l'on reste dans D.

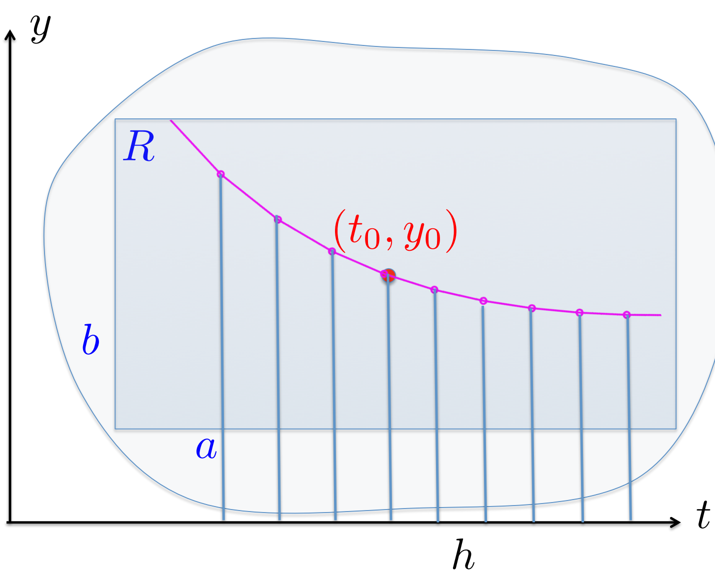


FIGURE 2.10 – Rectangle de *sécurité*

En décomposant dans les sous-intervalles, on a

$$|u(t) - u(t_0)| \leqslant M(t - t_0)$$

Donc, si D contient un rectangle centré en (t_0, y_0), *i.e.*

$$\exists a > 0, b > 0, R = \{(t,y), |t - t_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}. \tag{2.19}$$

alors la solution ainsi construite est définie sur l'intervalle

$$I = [t_0, t_0 + c[, \quad c = min(a, b/M)$$

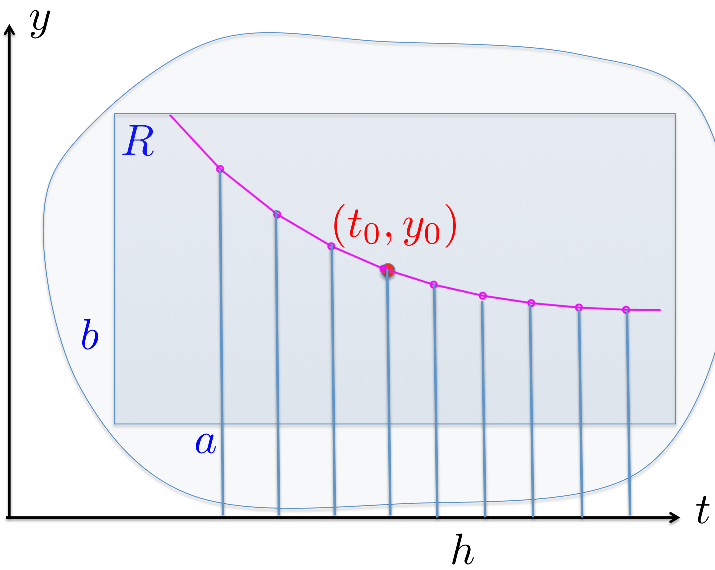


FIGURE 2.11 – Rectangle de *sécurité*

Ces solutions ϵ- *approchées* permettent de démontrer un résultat d'**existence locale** .

Théorème 4 (Existence locale)**.** *Supposons f continue, lipschitzienne par rapport à y dans le domaine D. Soit (t_0, y_0) un point de D, et R le triangle de sécurité défini en (2.19). Alors il existe une solution de (2.4),(2.5) sur l'intervalle $|t - t_0| \leqslant c$, où $M = \sup_R |f(t,y)|$ et $c = \min(a, b/M)$.*

Étapes de la démonstration.

1. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe h tel que le schéma d'Euler définisse une solution u ϵ- *approchée*.
2. Convergence d'une suite u_n de solutions ϵ_n- *approchées* par Proposition 1.
3. La limite est solution de l'équation.

$\square$

Remarque 3. La démonstration utilise le fait que f est lipschitzienne par rapport à y . En fait le résultat est encore vrai sans cette hypothèse. C'est ce résultat que nous utiliserons par la suite.

Corollaire 1 (Estimation d'erreur). *On fait les hypothèses du théorème 4. Soit y une solution du problème de Cauchy (2.4),(2.5) , et $\tilde{y}$ une solution ϵ- approchée sur $I = \{|t - t_0| \leqslant c\}$ telle que $y(t_0) = y_0$. Alors*

$$\forall t \in I, |y(t) - \tilde{y}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{L}(e^{Lc} - 1) \tag{2.20}$$

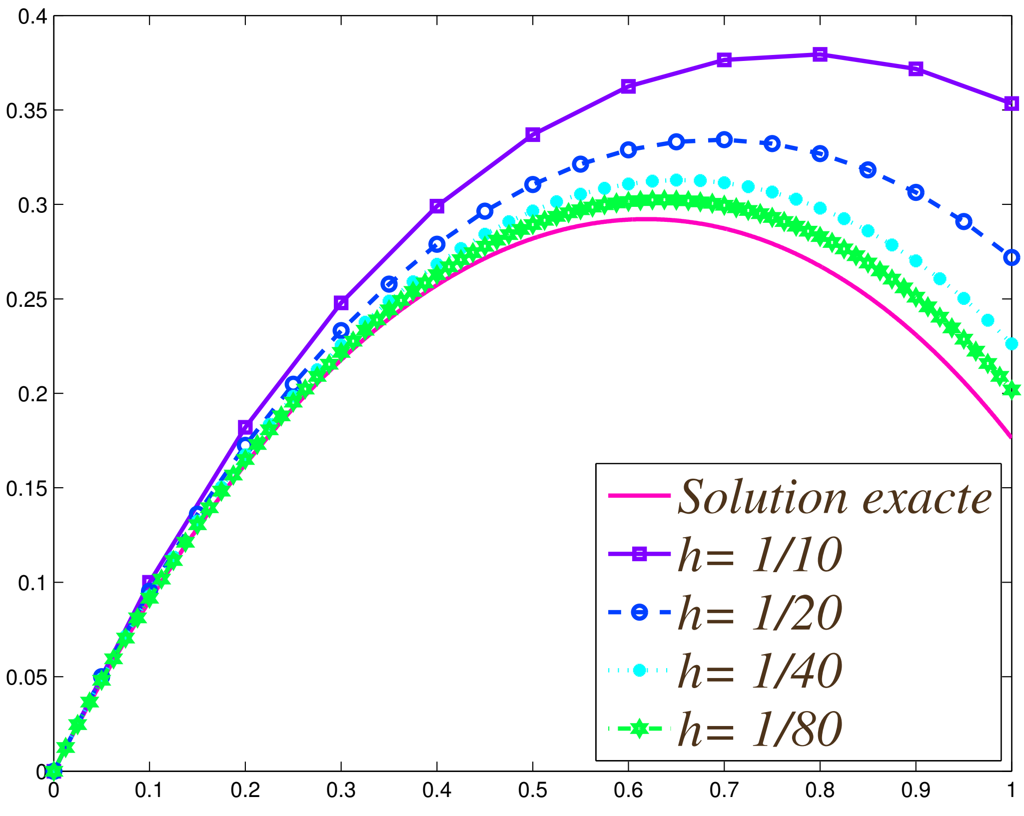


FIGURE 2.12 – Application de la méthode d'Euler pour le problème de Newton

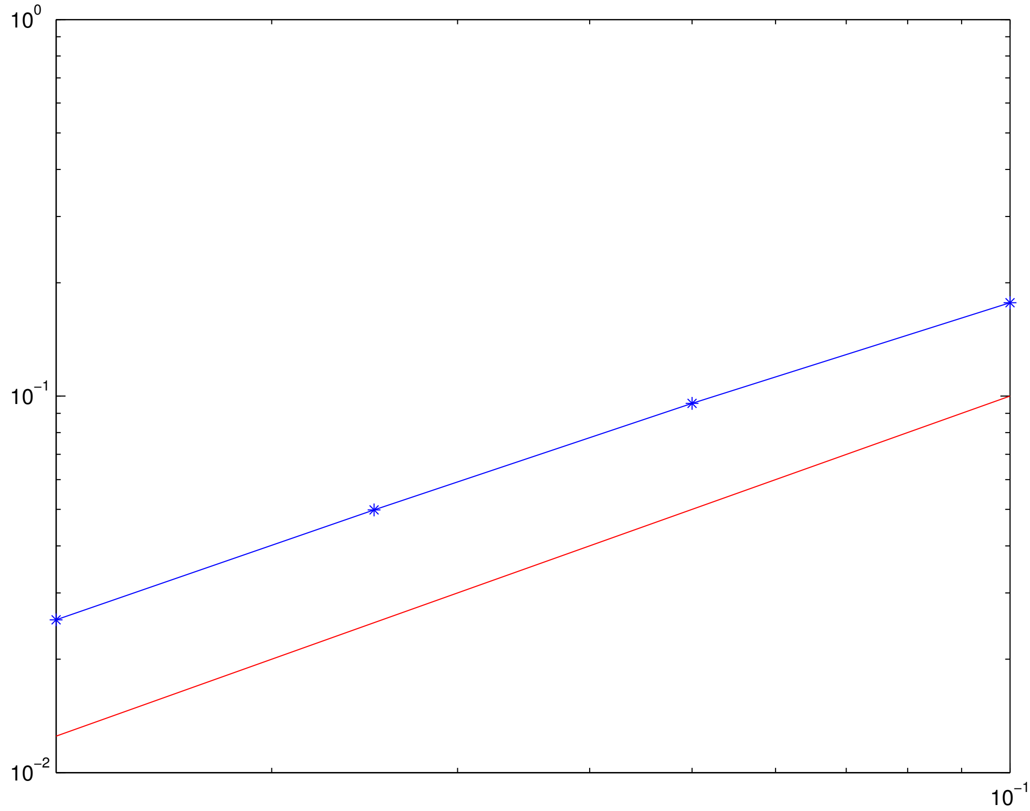


FIGURE 2.13 – Courbes de convergence : erreur en fonction de ϵ

2.1.3 Stabilité

C'est une notion fondamentale en calcul numérique : la sensibilité de la solution de l'équation à une erreur faite sur les données.

Commençons par démontrer que l'existence pour une donnée initiale entraîne l'existence dans le voisinage de cette donnée. Nous démontrerons ensuite la continuité de cette solution par rapport à t et à la condition initiale.

Théorème 5. *On suppose que f est continue, lipschitzienne par rapport à y dans D. Soit $(t_0, \tilde{y}_0)$ un point de D, tel que le rectangle $\tilde{R} = \{(t, y) \in D, |t - t_0| \leqslant a, |y - \tilde{y}_0| \leqslant b\}$ soit contenu dans D. Alors pour toute donnée initiale y_0 avec $|y_0 - \tilde{y}_0| \leqslant \frac{b}{2}$, le problème de Cauchy (2.4),(2.5) admet une solution unique $y(t; y_0)$ dans le rectangle $R = \{(t, y) \in D, |t - t_0| \leqslant d, |y - y_0| \leqslant Md\}$, avec $M = \sup_R |f(t, y)|$ et $d = \min(a, \dfrac{b}{2M})$.*

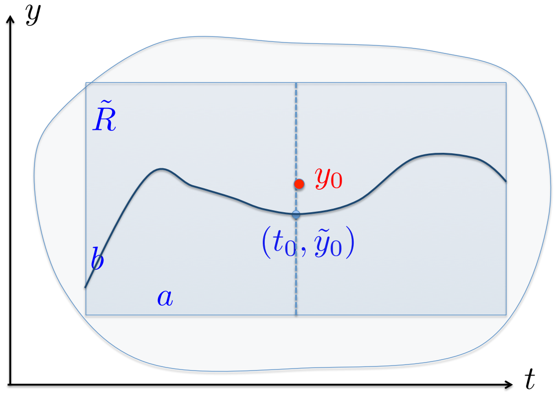


FIGURE 2.14 – Rectangle de *sécurité*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème d'existence. □

Théorème 6. *Si f est continue, lipschitzienne par rapport à y dans le domaine D, et si une solution $y(t; y_0)$ existe pour un rectangle $R = \{(t, y) \in D, |t - t_0| \leqslant a', |y - y_0| \leqslant b'\}$, alors $y(t; y_0)$ est continue par rapport à t et y_0.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 1 de comparaison des solutions ϵ- *approchées* avec $\epsilon = 0$. □

Regardons maintenant une perturbation sur la fonction f.

Théorème 7. *Si, dans un domaine D,*

1. *f et F sont continues,*
2. *f est lipschitzienne par rapport à y , de constante de Lipschitz L,*
3. *$\exists \varepsilon > 0, \forall (t, y) \in D, |f(t, y) - F(t, y)| \leqslant \varepsilon$,*
4. *il existe un point (t_0, y_0) tel que l'on puisse définir les fonctions $y(t)$ et $\tilde{y}(t)$ par :*
   (a) $\forall t, |t - t_0| \leqslant c, (t, y(t)) \in D, (t, \tilde{y}(t)) \in D$
   (b) $\forall t, |t - t_0| \leqslant c, y'(t) = f(t, y(t));\ \tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t))$
   (c) $y(t_0) = \tilde{y}(t_0) = y_0$

Alors

$$\forall t, |t - t_0| \leqslant c, |y(t) - \tilde{y}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{L}(e^{Lc} - 1) \tag{2.21}$$

Remarque 4. En pratique, la fonction f n'est continue et lipschitzienne par rapport à y que localement dans D : pour tout point (t_1, y_1) dans D, il existe un rectangle autour de ce point tel que f y soit continue et lipschitzienne par rapport à y . La constante de Lipschitz dépend alors de ce point.

Exemple 1.

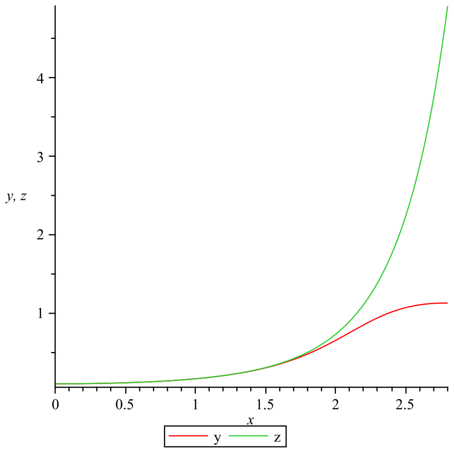
$$y'(t) = \sin(ty), \quad y(0) = 0.1$$

$$z'(t) = ty, \quad z(0) = 0.1$$

$$D = \{|t| \leqslant 1/2, \quad |y - 0.1| \leqslant 1/2\}$$

Alors

$$|f(t,y) - F(t,y)| = |\sin(ty) - ty| \cdots$$




```
> with(plots)
> sys := diff(y(x), x) = sin(x*y(x)
   ), diff(z(x), x) = x*z(x) :
> fcns := {y(x), z(x)}:
> p := dsolve({sys, y(0) = .1, z(0)
   = .1}, fcns, type = numeric,
  method = classical):
> odeplot(p, [[x, y(x)], [x, z(x)
   ]], 0 .. 2.8)
```

FIGURE 2.15 – Linéarisation grâce au théorème 7

De même on établit un théorème de dépendance continue par rapport à un paramètre. Nous le donnerons pour les systèmes.

2.1.4 Solutions maximales

Donnons d'abord quelques définitions

Définition 4.

1. On appelle solution locale du problème de Cauchy (2.4),(2.5) la donnée d'un couple (I, y) où I est un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$ et y une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans I vérifiant (2.4).
2. On dit que la solution (J, z) prolonge la solution (I, y) si

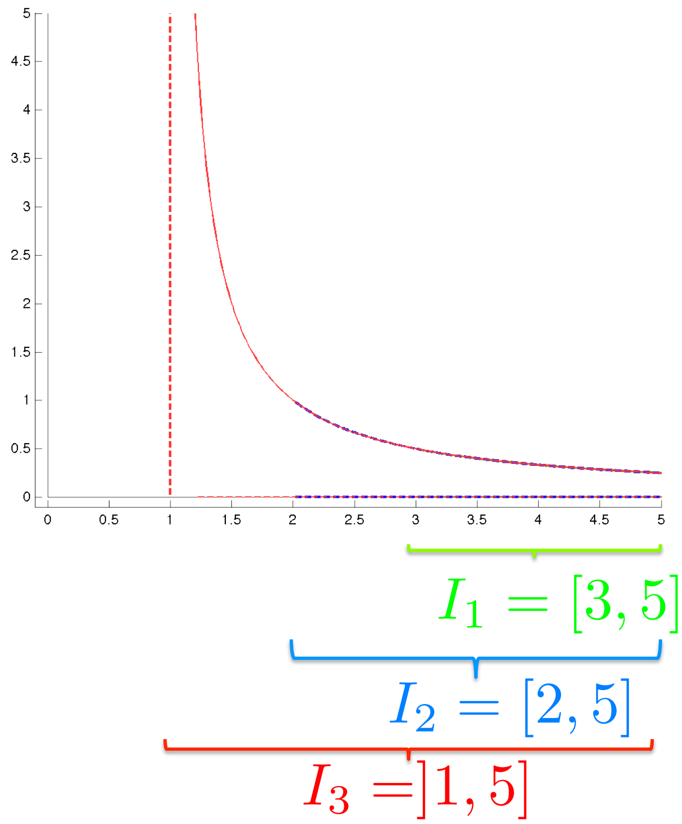
$$\left\{ \begin{array}{l} I \subset J \\ \forall t \in I, y(t) = z(t) \end{array} \right. \tag{2.22}$$

   Si de plus I est inclus strictement dans J, on dit que (J, z) prolonge strictement (I, y) .
3. On dit que la solution locale (I, y) est une solution maximale du problème de Cauchy (2.4),(2.5) s'il n'existe pas de solution locale qui la prolonge strictement.
4. On dit que (I, y) est solution globale du problème de Cauchy (2.4),(2.5) dans l'intervalle I_0 si (I, y) est solution locale et si $I = I_0$.

Remarque 5. Si f est continue et lipschitzienne par rapport à y dans $I_0 \times \mathbb{R}$, alors il existe une solution globale unique dans $I_0 \times \mathbb{R}$.

Lemme 1. *Etant donnée une solution locale, il existe au moins une solution maximale qui la prolonge.*

Démonstration. Lemme de Zorn (1935). $\square$



$$y' = y^2, \quad y(2) = 1$$

FIGURE 2.16 – Prolongement

Lemme 2. *On suppose que* $D = I_0 \times \mathbb{R}$. *Si* (I, y) *est une solution maximale non globale, alors* $I =]t_0 - \alpha, t_0 + \beta[$ *et* y *n'est pas bornée sur* I.

Soit y est bornée sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \beta$ et la solution maximale est globale, soit on a explosion en temps fini c'est-à-dire que $\lim_{t \to \alpha,\beta} = \pm\infty$.

2.1.5 Etude des solutions globales

On a vu qu'une solution maximale est globale si elle est bornée. Nous obtiendrons une borne par des **estimations a priori**.

Théorème 8. *On suppose que* $D = I_0 \times \mathbb{R}$, $I_0 = [t_0, t_1)$, *et qu'il existe une fonction* l*dans* $\mathcal{L}^1(I_0)$ *telle que*

$$\forall (t, y) \in D, f(t, y)y \leqslant l(t)(1 + y^2). \tag{2.23}$$

Alors le problème (2.4),(2.5) admet au moins une solution globale dans I_0.

Rappelons que $\mathcal{L}^1(I_0)$ est l'espace des fonctions mesurables I_0 sur pour la mesure de Lebesgue, intégrables sur I_0.

Remarque 6. Si I_0 est $(t_0 - \alpha, t_0 - \beta)$, il faut remplacer (2.23) par

$$\forall (t, y) \in D, sgne(t - t_0)f(t, y)y \leqslant l(t)(1 + y^2). \tag{2.24}$$

Corollaire 2. *On suppose que* $D = I_0 \times \mathbb{R}$, $I_0 = [t_0, t_1)$, *et qu'il existe une fonction* l*dans* $\mathcal{L}^1(I_0)$ *telle que*

$$\forall (t, y) \in D, f(t, y)y \leqslant l(t)(1 + |y|). \tag{2.25}$$

Alors le problème (2.4),(2.5) admet au moins une solution globale dans I_0.

Considérons maintenant les problèmes d'unicité globale. On pose encore $D = I_0 \times \mathbb{R}$.

Définition 5. On dit que le problème (2.4),(2.5) admet une solution et une seule s'il admet une solution globale et si toute solution locale est la restriction de cette solution globale.

Nous avons déjà vu que le cas où f est lipschitzienne est un cas favorable, mais trop contraignant dans la pratique. Nous allons remplacer cette condition par une condition plus faible, qui conviendra en particulier aux systèmes "raides".

Théorème 9. *On suppose que* $D = I_0 \times \mathbb{R}$, $I_0 = [t_0, t_1)$, *et qu'il existe une fonction* l *dans* $\mathcal{L}^1(I_0)$ *telle que*

$$\forall t \in I_0, \forall (y, z) \in \mathbb{R}, (f(t, y) - f(t, z))(y - z) \leqslant l(t)(y - z)^2. \tag{2.26}$$

Alors le problème (2.4),(2.5) admet une solution et une seule dans I_0.

Il peut arriver que les solutions $y(t)$ puissent être calculées explicitement : c'est le cas pour les équations linéaires, exactes, de Bernouilli, Ricatti,..

2.2 Des équations intégrable explicitement

2.2.1 Equations différentielles linéaires

$$y' = a(t)y + b(t) \tag{2.27}$$

Le problème de Cauchy est constitué de (2.27) et de la condition initiale (2.5) .

Théorème 10. *Si les applications $t \to a(t)$ et $t \to b(t)$ sont continues de $(0, T)$ dans $\mathbb{R}$, le problème de Cauchy (2.27) (2.5) admet une solution et une seule sur $(0, T)$.*

Comment calculer les solutions ? Si $t \to a(t)$ est une fonction constante, alors la solution générale de l'**équation homogène** est de la forme αe^{at}, où α est une constante réelle : l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 1 (une droite vectorielle) dont une base est constituée de la fonction $t \to e^{at}$. La solution générale de l' **équation avec second membre** est égale à la somme de l'équation générale de l'équation homogène et d'une solution particulière $\tilde{y}$. Comment obtenir cette solution particulière ?

- Soit il y a une solution évidente. Par exemple pour l'équation

$$y' + 3y = 1,$$

  la solution évidente est $y = \frac{1}{3}$. Donc la solution général de l'équation précédente est $y = \alpha e^{3t} + \frac{1}{3}$.
- Sinon on fait appel à la **méthode de variation de la constante** inventée par Pierre-Simon de Laplace [2] : on cherche cette solution particulière sous la forme

$$\tilde{y}(t) = \alpha(t)e^{at}.$$

  Si on dérive cette équation et qu'on la remplace dans (2.27), on obtient

$$\alpha'(t)e^{at} = b(t),$$

  et l'on peut alors calculer α au moyen d'une quadrature

$$\alpha(t) = \int_0^t b(s)e^{-as}ds.$$

  Notons que cette fonction choisie est celle qui vaut 0 en 0.

Maintenant si a n'est pas constante, il faut déjà une intégration pour calculer la solution général de l'équation homogène, qui s'écrit

$$\alpha e^{\int_0^t a(s)\,ds}.$$

La variation de la constante est un peu plus difficile. On cherche

$$\tilde{y}(t) = \alpha(t)e^{\int_0^t a(s)\,ds}.$$

Si on dérive cette équation et qu'on la remplace dans (2.27), on obtient

$$\alpha'(t)e^{\int_0^t a(s)\,ds} = b(t),$$

et l'on peut alors calculer α au moyen d'une quadrature

$$\alpha(t) = \int_0^t b(s)e^{-\int_0^s a(\tau)\,d\tau}ds.$$

2. Pierre-Simon de Laplace , 1749-1827, un des principaux scientifiques de l'époque napoléonienne, ministre de l'intérieur sous le consulat

Théorème 11. *Dans les conditions d'application du théorème 10, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme*

$$y(t) = \left(\alpha + \int_0^t b(s)e^{-\int_0^s a(\tau)\,d\tau} ds\right) e^{\int_0^t a(s)\,ds}.$$

La solution du problème de Cauchy est

$$y(t; y_0) = \left(y_0 + \int_0^t b(s)e^{-\int_0^s a(\tau)\,d\tau} ds\right) e^{\int_0^t a(s)\,ds}.$$

Exemples :

$$y' + 3y = 12.$$

$$y' + y = e^{-t}.$$

$$y' + \frac{2}{x}y = 12.$$

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = x.$$

$$(x \ln x)y' + y = 2 \ln x.$$

$$xy' + 6y = 3x + 1.$$

2.2.2 Equations séparables

Un exemple :

$$y' = \frac{xy}{x^2 - 1}.$$

Rappelons-nous que $y' = \frac{dy}{dx}$, et réécrivons à gauche tout ce qui concerne y, et à droite tout ce qui concerne x :

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{x^2 - 1}.$$

Il ne reste plus qu'à intégrer **séparément** des deux côtés, d'où le nom séparable.

2.2.3 Equations homogènes

Un exemple :

$$(x + y)\,dx - x\,dy = 0.$$

Si nous faisons le changement $(x, y) \to (kx, ky)$, nous remarquons que l'équation est incha,gée. Nous posons alors $y = xu$, d'où $dy = xdu + udx$, et donc

$$dx - xdu = 0.$$

et nous sommes ramenés à une équation à variables séparées.

2.2.4 Equations de Bernouilli

Les équations de Bernouilli[3] sont de la forme

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)y^m(t)$$

où $m \neq 1$. Divisons l'équation par $y^m(t)$:

$$a(t)\frac{y'(t)}{y^m(t)} + b(t)\frac{1}{y^{m-1}(t)} = c(t)$$

le premier terme est proportionnel à la dérivée de $\frac{1}{y^{m-1}(t)}$, puisque

$$\left(\frac{1}{y^{m-1}(t)}\right)' = -(m-1)\frac{y'(t)}{y^m(t)}$$

Donc si nous posons $u = \frac{1}{y^{m-1}(t)}$, nous obtenons

$$-\frac{a}{m-1}u' + bu = c.$$

Nous nous somme ramenés à une équation linéaire. **Exemples**

$$y' + y = -\frac{t}{y}, \qquad ty' + y = y^2 \ln t \quad .$$

2.2.5 Equations de Ricatti

L'équation de Ricatti[4] (qui intervient en contrôle optimal) est de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y^2(t) + c(t)$$

Supposons connue une solution particulière $\bar{y}$. Posons $z = y - \bar{y}$. Alors l'équation portant sur z s'écrit

$$z'(t) + (a(t) - 2b(t)\bar{y}(t))\, z(t) = b(t)z^2(t).$$

C'est une équation de Bernoulli, il ne reste plus qu'à la résoudre. La difficulté est de trouver une solution exacte. **Exemples**

$$t^3y' + y^2 + t^2y + 2t^4 = 0, \qquad y' + \frac{y}{t} - y^2 + \frac{1}{t^2} = 0$$

2.3 Autres démonstrations : Picard et Newton

3. proposée par Jacques Bernoulli en 1695 et résolue un an plus tard par Leibniz
4. Jacopo Francesco Riccati (1676-1754)

Chapitre 3

Extension aux systèmes et équations d'ordre supérieur

3.1 Définitions

Un **système du premier ordre** s'écrit

$$Y' = F(t, Y) \tag{3.1}$$

où Y est maintenant un élément de $\mathbb{R}^n$, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$. et F est une application définie sur un domaine D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. la dérivée Y' du vecteur Y est évidemment définie comme $Y' = \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_n \end{pmatrix}$. Comme dans le cas scalaire, pour préciser une solution de l'équation, on se donne une **donnée initiale**

$$Y(t_{0)} = Y_0. \tag{3.2}$$

et l'on peut considérer le **problème de Cauchy** vectoriel associé.

Considérons maintenant une **équation différentielle scalaire d'ordre n** écrite sous forme normale

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{3.3}$$

où, pour tout k, $y^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de y. On réduit cette équation à un système en posant

$$\begin{array}{rcl} Y_1 & = & y \\ Y_2 & = & y' \\ & \vdots & \\ Y_n & = & y^{(n-1)}. \end{array} \tag{3.4}$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{array}{lcl} Y_1' & = & Y_2 \\ Y_2' & = & Y_3 \\ & \vdots & \\ Y_{n-1}' & = & Y_n \\ Y_n' & = & f(t, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \end{array} \tag{3.5}$$

ce qui correspond bien à la forme (3.1). Les conditions initiales doivent être données sur Y, c'est-à-dire que les $(n-1)$ premières dérivées doivent être prescrites :

$$y(t_{0)} = y_0, y'(t_{0)} = y_0', \ddots, y^{(n-1)}(t_{0)} = y_0^{(n-1)}. \tag{3.6}$$

Le problème de Cauchy réside ici dans la résolution de (3.3),(3.6), et se ramène à la résolution du problème de Cauchy pour le système (3.2). C'est donc ce dernier que nous allons étudier. L'espace $\mathbb{R}^n$ où vit la solution Y est appelé l'**espace des phases**, et l'ensemble des (t, Y) vit dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, appelé **espace des phases élargi**.

Les définitions sont les mêmes que dans le cas scalaire, tous les résultats écrits jusqu'ici s'étendent au cas vectoriel en changeant les valeurs absolues en normes. On sait que sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes, on pourra considérer en particulier l'une des trois normes suivantes :

$$\begin{array}{lcl} ||Y||_1 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |Y_i| \\ ||Y||_\infty & = & sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |Y_i| \\ ||Y||_2 & = & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |Y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \tag{3.7}$$

La norme euclidienne $||.||_2$ est associée au produit scalaire noté $(.,.)$.

3.2 Résultats d'existence et d'unicité pour les systèmes

Théorème 12 (Existence locale)**.** *Supposons f définie et continue dans le domaine D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Soit (t_0, y_0) un point de D tel que D contienne le parallélépipède $R = \{(t, y), |t - t_0| \leqslant a, ||Y - Y_0|| \leqslant b\}$. Supposons également f lipschitzienne par rapport à y dans D, i.e. il existe une constante positive L telle que*

$$\forall (t, y_1) \in D, \forall (t, y_2) \in D, ||f(t, y_1) - f(t, y_2)|| \leqslant L||y_1 - y_2|| \tag{3.8}$$

Alors il existe une unique solution de (3.1),(3.2) sur l' intervalle $|t - t_0| \leqslant c$, où $M = \sup_R ||f(t, y)||$ et $c = \min(a, \dfrac{b}{M})$.

Les théorèmes 8 et 9 admettent les généralisations suivantes :

Théorème 13. *On suppose que $D = I_0 \times \mathbb{R}^n$, $I_0 = [t_0, t_1)$, et qu'il existe une fonction $l$dans $\mathcal{L}^1(I_0)$ telle que*

$$\forall (t, y) \in D, (f(t, y), y) \leqslant l(t)(1 + ||y||^2). \tag{3.9}$$

Alors le problème (3.1),(3.2)admet au moins une solution globale dans I_0.

Théorème 14. *On suppose que $D = I_0 \times \mathbb{R}^n$, $I_0 = [t_0, t_1)$, et qu'il existe une fonction l dans $\mathcal{L}^1(I_0)$ telle que*

$$\forall t \in I_0, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^n, (f(t, y) - f(t, z), y - z) \leqslant l(t)||y - z||^2. \tag{3.10}$$

Alors le problème (3.1),(3.2) admet une solution et une seule dans I_0.

3.3 Variation par rapport à un paramètre

Soit un paramètre α prenant ses valeurs dans un intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ de $\mathbb{R}^p$. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{array}{rcl} Y' & = & F(t, Y, \alpha) \\ Y(t_0) & = & Y_0 \end{array} \tag{3.11}$$

Théorème 15. *Supposons F définie et de classe $\mathcal{C}^r$ par rapport à (α, t, Y) sur $[\alpha_1, \alpha_2] \times R$, lipschitzienne par rapport à Y sur $[\alpha_1, \alpha_2] \times R$. Alors le problème de Cauchy (3.11) admet une unique solution $Y(t; t_0, Y_0, \alpha)$, classe $\mathcal{C}^r$ par rapport à (α, t, Y) sur $[\alpha_1, \alpha_2] \times R$.*

3.4 Cas des équations différentielles linéaires

Commençons par les systèmes. Un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre s'écrit

$$Y' = A(t)Y + b(t) \tag{3.12}$$

où, pour tout t, $A(t)$ est une matrice $n \times n$ (*i.e.* un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)et $b(t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ constitué de (3.12) et de la condition initiale

$$Y(t_0) = Y_0$$

Corollaire 3. *Si les applications $t \to A(t)$ et $t \to b(t)$ sont continues de I_0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, le problème de Cauchy (3.12) (3.2) admet une solution et une seule sur I_0 .*

Maintenant une équation différentielle linéaire d'ordre n s'écrit

$$p_0(t)\frac{d^n y}{dt^n}(t) + p_1(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t) + \cdots + p_n(t)y(t) = b(t) \tag{3.13}$$

et les données de Cauchy sont celles écrites en (3.6).

Corollaire 4. *Si les applications $t \to p_j(t)$, pour $0 \leqslant j \leqslant n$, et $t \to b(t)$ sont continues de I_0 dans $\mathbb{R}$, si $|p_0|$ est borné inférieurement sur I_0, le problème de Cauchy (3.13) (3.6) admet une solution et une seule sur I_0 .*