MACS1 - S6 - Equations différentielles - TD2
Théorème de Cauchy-Lipschitz – Lemme de Gronwall

1 Une autre démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, continue en ces deux variables et lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. On rappelle que le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité locales d'une solution du problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

Il existe plusieurs démonstrations possibles de ce théorème.

1. Rappelez les étapes principales de la démonstration vue en cours, basée sur l'utilisation des solutions $\epsilon-$approchées construites à l'aide du schéma d'Euler.

2. On cherche ici à établir une autre preuve du même théorème, basée sur l'utilisation du théorème de point fixe et des itérations de Picard. La démonstration se décompose en trois temps

   - Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle réel et à valeurs réelles, noté $C^0(I, \mathbb{R})$, et muni de la norme *sup* (dite aussi norme L^∞) définie par

     $$||g||_\infty = \max_{x \in I} |g(x)|$$

     est un espace de Banach.

   - Montrer que toute fonction g définie sur un espace de Banach E, continue et contractante au sens où

     $$\exists c \in]0, 1[\quad \forall (x, y) \in E^2 \quad ||g(x) - g(y)|| \leq c||x - y||$$

     admet un unique point fixe.

   - Ecrire le problème (1) sous forme intégrale

     $$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \tag{2}$$

     puis montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la fonction T définie sur l'ensemble des fonctions continues et qui a toute fonction g associe la fonction

     $$T_g(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds$$

     vérifie le fait que T^p est contractante pour la norme *sup*.

2 Lemme de Gronwall

1. **Forme classique** :
   Soient trois fonctions f, ϕ et ψ continues et positives sur un intervalle $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Montrer que la relation
   $$\forall t \in I \qquad f(t) \leq \phi(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(s) f(s) ds$$
   entraîne l'estimation
   $$\forall t \in I \qquad f(t) \leq \phi(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \psi(u) du\right) ds$$

2. **Cas particulier** :
   Soient deux fonctions f et ψ continues et positives sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que la relation
   $$\exists c \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in I \qquad f(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} \psi(s) f(s) ds$$
   entraîne l'estimation
   $$\forall t \in I \qquad f(t) \leq c \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi(s) ds\right)$$

3. **Forme différentielle** :
   Soient deux fonctions f et ψ continues et positives sur un intervalle $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Montrer que la relation
   $$\exists K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in I \qquad f'(t) \leq K + \psi(t) f(t)$$
   entraîne l'estimation
   $$\forall t \in I \qquad f(t) \leq (f(t_0) + K(t_1 - t_0)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi(s) ds\right)$$

4. **Application à l'unicité des solutions du problème de Cauchy** :
   Soit f une fonction de deux variables réelles, lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. En utilisant la forme intégrale (2) du problème de Cauchy, montrer que deux solutions maximales $\bar{y}(t)$ et $\hat{y}(t)$ définies sur les intervalles $\bar{I}$ et $\hat{I}$ et associées aux conditions initiales $\bar{y}_0$ et $\hat{y}_0$ vérifient
   $$\forall t \in I = \bar{I} \cap \hat{I} \quad |\bar{y}(t) - \hat{y}(t)| \leq |\bar{y}_0 - \hat{y}_0| \exp\left(L|t - t_0|\right)$$
   où L désigne la constante de Lipschitz associée à la fonction f. En déduire l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

5. **Application à l'existence d'une solution globale du problème de Cauchy** :
   Montrer que si f satisfait la relation
   $$\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad ||f(x)|| \leq \alpha ||x|| + \beta$$
   alors toute solution maximale du problème de Cauchy (1) est une solution globale.

6. **Forme discrète** :
   Soient trois suites de nombres positifs h_k, e_k et ϵ_k. Soit $\lambda \in R_+$. Montrer que la relation
   $$\forall n \qquad e_{n+1} \leq (1 + \lambda h_n) e_n + \epsilon_n$$
   entraîne l'estimation
   $$e_n \leq \exp\left(\lambda \sum_{k=0}^{n-1} h_k\right) e_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(\lambda \sum_{k=j+1}^{n-1} h_k\right) \epsilon_j$$