Sup'Galilée
MACS1

Année 2019/2020

Algèbre linéaire - Réduction des matrices (voir le chapitre 4 du cours)

---

1 Théorème de Schur

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ (i.e. inversible avec $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*$) telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit **triangulaire supérieure** :

$$\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbb{T} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$. La matrice $\mathbb{A}$ s'écrit alors $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$. Les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont les éléments diagonaux de $\mathbb{T}$ car :

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) &= \det(\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^* - \lambda\mathbb{I}) \\
&= \det(\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^* - \lambda\mathbb{U}\mathbb{U}^*) \\
&= \det\left(\mathbb{U}(\mathbb{T} - \lambda\mathbb{I})\mathbb{U}^*\right) = \det(\mathbb{U})\det(\mathbb{T} - \lambda\mathbb{I})\det(\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{U}\mathbb{U}^*)\det(\mathbb{T} - \lambda\mathbb{I}) = \det(\mathbb{T} - \lambda\mathbb{I}).
\end{aligned}$$

2 Diagonalisation d'une matrice

On dit que la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ s'il existe une matrice **inversible** $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit **diagonale** :

$$\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbb{D} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$. La matrice $\mathbb{A}$ s'écrit alors $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^{-1}$. Les éléments diagonaux de $\mathbb{D}$ sont les valeurs propres de $\mathbb{A}$, et pour $j \in [\![1, n]\!]$, le j-ème vecteur colonne $\boldsymbol{u}^{(j)}$ de la matrice $\mathbb{U}$ est un vecteur propre de $\mathbb{A}$ associé à la valeur propre λ_j. En effet, on a :

$$\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{D} \iff \mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{D} \iff \mathbb{A}\boldsymbol{u}^{(j)} = \lambda_j \boldsymbol{u}^{(j)}, \ \forall j \in [\![1, n]\!].$$

C'est à dire qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres.

Cas particuliers :

- Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que toutes ses valeurs propres sont distinctes. Alors $\mathbb{A}$ est diagonalisable. Cela vient du fait que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants (exercice à la maison). Donc les n vecteurs propres associés à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ forment une base de $\mathbb{C}^n$ (on a $\mathbb{C}^n = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}$, où E_{λ_i} est le sous espace propre associé à λ_i et qui vérifie ici $\dim(E_{\lambda_i}) = 1, \ \forall i \in [\![1, n]\!]$).
- Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne, alors $\mathbb{A}$ est diagonalisable. De plus $\mathbb{U}$ est unitaire, c'est-à-dire que $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*$, ce qui revient à dire qu'il existe une base orthogonale de vecteurs propres. Ce résultat est un application directe du théorème de Schur : il existe une matrice $\mathbb{U}$ unitaire telle que la matrice $\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{T}$ soit triangulaire supérieure. Alors $(\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U})^* = \mathbb{T}^*$. Mais $(\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U})^* = \mathbb{U}^*\mathbb{A}^*\mathbb{U} = \mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{T}$ (puisque $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}$). Donc $\mathbb{T}^* = \mathbb{T}$ ce qui entraîne que $\mathbb{T}$ est diagonale. De plus, $\mathbb{T}$ est réelle, c'est-à-dire que toute les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont réelles.

Exemple : Soit $\mathbb{A}$ définie par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont les racines du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}$:

$$\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 + 1.$$

On a donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. Elles sont distinctes donc $\mathbb{A}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et les vecteurs propres sont dans $\mathbb{C}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ (un vecteur propre associé à λ_1 est $\boldsymbol{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, et un vecteur propre associé à λ_2 est $\boldsymbol{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$), et ils forment une base de $\mathbb{C}^2$ (en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$).

3 Décomposition de Jordan

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\{\lambda_i\}_{1\leqslant i\leqslant \ell}$ les valeurs propres de $\mathbb{A}$, deux à deux disctinctes, de multiplicité m_i, c'est-à-dire :

$$\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}) = (-1)^n \prod_{i=1}^{\ell}(\lambda-\lambda_i)^{m_i}, \quad \text{avec } \sum_{i=1}^{\ell} m_i = n.$$

Alors il existe une matrice inversible $\mathbb{X}$ telle que $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X}$ soit **diagonale par blocs** :

$$\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_{k_{1,1}}(\lambda_1) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{J}_{k_{1,2}}(\lambda_1) & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \mathbb{J}_{k_{2,1}}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & \mathbb{J}_{k_{\ell,s_\ell}}(\lambda_\ell) \end{pmatrix},$$

avec $\mathbb{J}_k(\lambda) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathbb{J}_1(\lambda) = \lambda, \qquad \mathbb{J}_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \text{pour } k > 1.$$

$\mathbb{J} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X}$ est **la forme canonique de Jordan**, et $\mathbb{J}_k$ est un **bloc de Jordan**.
Si l'on a s_i blocs de Jordan associés à une même valeur propre λ_i, chacun de taille $k_{i,j}$, alors $\sum_{j=1}^{s_i} k_{i,j} = m_i$ où m_i est la muliplicité algébrique de λ_i (en tant que racine de $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(\lambda) = \det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})$).

Notons que : $\mathbb{A}$ est diagonalisable $\iff$ $\ell = n$, $s_i = 1, \forall i \in [\![1,n]\!]$ et $k_{1,1} = \cdots = k_{n,1} = 1$.

Exemple : Soit $\mathbb{A}$ définie par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 10 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 10 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 1 \\ -6 & -2 & -2 & 2 & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbb{A}$ a deux valeurs propres $\lambda_1 = 8$ de multiplicité $m_1 = 3$ et $\lambda_2 = 12$ de multiplicité $m_2 = 3$. La forme de Jordan de $\mathbb{A}$ est

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_{1,1}(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \mathbb{J}_{2,1}(\lambda_2) & \\ \mathbf{0} & & \mathbb{J}_{1,2}(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

On a donc ici deux blocs de Jordan associés à la valeurs propre $\lambda_1 = 8$: l'un de taille $k_{1,1} = 2$ l'autre de taille $k_{1,2} = 1$ (on a bien $k_{1,1} + k_{1,2} = 3 = m_1$), et on a un seul bloc de Jordan associé à $\lambda_2 = 12$, de taille $k_{2,1} = 3 = m_2$. La matrice $\mathbb{A}$ n'est donc pas diagonalisable.