Sup Galilée **Méthodes numériques**
MACS 1 **Année 2008-2009**

Projets encadrés - 6
Equations différentielles ordinaires (EDO).

Rappels théoriques

Considérons le systèmes d'équations différentielles :

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \cdots, y_n), \quad y_1(0) = y_{10} \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \cdots, y_n), \quad y_n(0) = y_{n0} \end{cases} \tag{1}$$

En notation vectorielle, ce système s'écrit

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0 \tag{2}$$

où $y = (y_1, \cdots, y_n)^T$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz) *Si $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est localement Lipschitzienne, i.e. pour tout $R > 0$ il existe K telle que si $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t, s \geq 0$ sont tels que $\|x\| \leq R$, $\|y\| \leq \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq R$ et $0 \leq s \leq R$, alors*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \quad \leq \quad K(\|x - y\|).$$

Alors, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe $T^\star$ et $y : [0, T^\star) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 solution de (2).
De plus, si f est de classe C^k, il est clair que y est de classe C^{k+1}.

La méthode d'Euler explicite

Les méthodes traditionnelles permettant de résoudre de manière approchée les systèmes d'EDO sont basée sur l'égalité

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t + h) - y(t)}{h}.$$

On a donc, pour h petit

$$y(t + h) \quad = \quad y(t) + hy'(t) + o(h).$$

Et on utilise le fait que y est solution de (2) pour écrire

$$y(t + h) \quad = \quad y(t) + hf(t, y(t)) + o(h). \tag{3}$$

Négligeant le $o(h)$, on obtient la méthode d'Euler explicite. On se donne un pas $h > 0$ et on note y_i^h, la valeur approchée de la solution exacte y au temps $t_i = ih$. La méthode d'Euler explicite est définie par

$$\begin{aligned} y_0^h &= y_0, \\ y_{i+1}^h &= y_i^h + hf(t_i, y_i^h), \qquad i \geq 0. \end{aligned}$$

On définit ensuite la solution approchée $y^h(t)$ à un temps $t \geq 0$ par

$$y^h(t) = (1-\lambda)y_i^h + \lambda y_{i+1}^h, \qquad \text{avec } i \text{ et } \lambda \text{ tels que } ih \leq t < (i+1)h \text{ et } t = (1-\lambda)ih + \lambda(i+1)h.$$

La fonction construite y^h est continue et affine par morceaux. Ce n'est pas le seul choix possible, on aurrait pu choisir une fonction constante par morceaux où polynomiale de degrés p par morceaux.

Remarque 2 *C'est en utilisant cette approximation qu'Euler a montré l'existence de solutions de* (2).

Q. 1 *Ecrire la fonction* MATLAB `Euler` *qui réalise la méthode d'Euler.*
Appliquer cette méthode à l'EDO

$$y' = -10y, \qquad y(0) = 1; \tag{4}$$

Vérifier la convergence en traçant l'erreur $e_{Euler}(h) = y(1) - y^h(1)$ *en fonction de* h*. On prendra* $h = 1, 1/2, 1/4, 1/8, \cdots$.

Même questions avec le système du pendule simple : considérons un pendule constitué d'une masse ponctuelle m *au bout d'une tige de masse nulle et de longueur* L*, tournant sans frottement autour de l'axe orienté dirigé par un vecteur horizontal* $\mathbf{e}$*, et soumis à la pesanteur* $\mathbf{g}$ *supposée uniforme. On note* x *l'angle que la tige fait avec la verticale et* $y = \frac{dx}{dt}$ *la vitesse angulaire de la tige. On est ramené à résoudre l'équation différentielle :*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega sin(x) = 0,$$

avec $\omega = \frac{g}{L}$ *(on se ramenera à un système d'EDO du premier ordre).*

Ordre de convergence de la méthode d'Euler

Soit y la solution exacte de (2). On suppose qu'elle est de classe C^2 sur l'intervalle $[0, T]$. On suppose aussi que $\|D_y f\|$ est uniformément bornée par $M > 0$. Pour étudier l'erreur, on définit le résidu

$$r_i^h \quad := \quad y((i+1)h) - y(ih) - hf(t_i, y(ih)), \qquad (i+1)h \leq T.$$

Comme y est solution de (2), on a

$$\begin{aligned} r_i^h &= \frac{y((i+1)h) - y(ih)}{h} - y'(ih), \\ &= \frac{1}{h}\int_{ih}^{(i+1)h} (y'(s) - y'(ih))\, ds, \end{aligned}$$

et si on note K le sup sur $[0, T]$ de $\|D^2 y\|$, on a

$$\|r_i^h\| \quad \leq \quad Kh. \tag{5}$$

Notons e_i^h l'erreur à l'instant ih

$$e_i^h \quad := \quad y(ih) - y_i^h,$$

par définition on a

$$e_{i+1}^h \quad = \quad e_i^h + h\left\{f(t_i, y(ih)) - f(t_i, y_i^h)\right\} + hr_i^h$$

d'où

$$\begin{aligned} \|e_{i+1}^h\| &\leq \|e_i^h\| + h \sup \|D_y f\| \|y(ih)) - y_i^h\| + Kh^2 \\ &\leq (1 + Mh)\|e_i^h\| + Kh^2. \end{aligned}$$

On en déduit (en utilisant une version discrète du lemme de Gromwall)

$$\|e_{i+1}^h\| \quad \leq \quad \frac{K}{M}(\exp(M(i+1)h) - 1)\, h.$$

Si on s'interesse à l'erreur à l'instant $T = (i+1)h$, on a donc

$$\|e_{i+1}^h\| \quad \leq \quad \frac{K}{M}(\exp(MT) - 1)\, h \;\; = \;\; O(h).$$

On dit qu'une méthode est d'ordre γ quand l'erreur est en $O(h^\gamma)$ où h est le pas de discrétisation. La méthode d'Euler explicite est donc d'ordre 1.

Q. 2 *Vérifier qu'on observe bien cet ordre de convergence sur les expemples précédents.*

Méthode de Runge-Kutta

On écrit

$$y((i+1)h) = y(ih) + h\left\{\frac{1}{h}\int_{ih}^{(i+1)h} f(y(s), s)\, ds\right\}.$$

Les méthodes ci-dessous consistent à remplacer la quantité entre accolades par une approximation. On obtient ainsi des schémas numériques ayant pour forme générale

$$y_{i+1}^h = y_i + h\phi(t_i, y_i^h, h).$$

Pour le schéma d'Euler explicite, vu plus haut, on a

$$\phi(t, y, h) \quad = \quad f(t, y).$$

Ces méthodes sont nombreuses. La plus couramment utilisée est la méthode de Runge-Kutta 4 définie comme suit

Méthode de Runge-Kutta à 4 étages.

$$\phi(t_n, y_n, h_n) = \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \tag{6}$$

avec

$$k_1 = f(t_n, y_n) \tag{7}$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + h_n\frac{k_1}{2}) \tag{8}$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + h_n\frac{k_2}{2}) \tag{9}$$

$$k_4 = f(t_n + h_n, y_n + h_n k_3) \tag{10}$$

Q. 3 *Ecrire la fonction* MATLAB `RungeKutta4`*. Appliquer cette méthode aux exemples vus plus haut. Quel est l'ordre de convergence de cette méthode ?*

Appliquer les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta 4 au système proie-prédateur de Lotka-Volterra :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -cx_1 + dx_1x_2, \\ \dot{x}_2 & = & ax_2 - bx_1x_2, \end{array}\right. \tag{11}$$

avec $a, b, c, d > 0$.

Q. 4 *Tracez les solutions dans l'espace des phases* $(y_1(t), y_2(t))_{t\geq 0}$ *pour les systèmes précédents.*

Méthodes implicites

Nous allons voir deux méthodes implicites qui s'écrivent sous la forme générale :

$$y_{i+1}^h = y_i + h\psi(t_i, t_{i+1}, y_i^h, y_{i+1}^h).$$

Pour calculer y_{i+1}^h, il faut donc résoudre un système. On utilisera pour cela la méthode de Newton

Pour le schéma d'Euler implicite, on a

$$\psi(s,t,y,z) \quad = \quad f(t,z),$$

et pour le schéma de Crank-Nicolson,

$$\psi(s,t,y,z) \quad = \quad \frac{1}{2}\left(f(s,y) + f(t,z)\right).$$

Q. 5 *Ecrire les fonctions* MATLAB `EulerImp` *et* `CrankNickolson`. *Appliquer ces méthodes aux exemples de la question 1. Quel est l'ordre de convergence de chaque méthode ?*