Sup Galilée
MACS 1

Méthodes numériques
Année 2008-2009

TD/TP - 5

Résolution des systèmes non linéaires.

But : 1) Ecrire les fonctions *NewtonSyst* et *PointFixeSyst* permettant de calculer une valeur approchée d'une solution d'un système d'équations non linéaire par les méthodes de Newton et point fixe respectivement.
2) Valider ces fonctions sur des exemples.

Partie Théorique

Résolution des systèmes non linéaires. L'objet de cette partie est la résolution des systèmes d'équations non linéaires de la forme suivante :

$$\text{Pour } F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \text{ trouver } \boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } F(\boldsymbol{x}^*) = 0. \tag{1}$$

Pour cela, on va étendre les algorithmes du TP3 au cas où $d > 1$.

Définition 1 *La matrice jacobienne $J_F(\boldsymbol{x})$ associée à F évaluée au point $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d)^t \in \mathbb{R}^d$ est définie par :*

$$(J_F(\boldsymbol{x}))_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)(\boldsymbol{x}), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

avec $F(\boldsymbol{x}) = (F_1(\boldsymbol{x}), \cdots, F_d(\boldsymbol{x}))^t$.

Méthode de Newton : On peut dériver la méthode de Newton en plusieurs dimensions géométriquement comme en une dimension, mais on peut également l'obtenir à l'aide d'un développement en série de Taylor. Regardons le cas $d = 1$:

$$F(x) = F(x^{(n)}) + F'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) + O(|x - x^{(n)}|^2).$$

Si $x^{(n)}$ est proche de x, les termes d'ordre élevé dans l'expression ci-dessus sont petits et on peut les négliger pour obtenir

$$F(x) \approx F(x^{(n)}) + F'(x^{(n)})(x - x^{(n)}),$$

soit encore (comme $F(x) = 0$),

$$x \approx x^{(n)} - \frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})}.$$

La méthode de Newton utilise cette approximation pour calculer le nouvel itéré :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})}, \quad n \geq 0.$$

On va utiliser cette démarche en dimension supérieure.

Méthode de point fixe : Pour trouver un zéro de F dans $\mathbb{R}^d$, on introduit une fonction continue $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que

$$G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \iff F(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{2}$$

Par exemple on peut définir G par

$$G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - F(\boldsymbol{x}),$$

mais notez qu'il y a une infinité de possibilités de choisir une fonction G qui vérifie (2). Trouver un zéro de F dans $\mathbb{R}^d$ est alors équivalent à trouver un point fixe de G dans $\mathbb{R}^d$.

Théorème 2 *Si $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est Lipschitzienne de constante de Lipschitz $L < 1$,*

$$\|G(\boldsymbol{x}) - G(\boldsymbol{y})\| \le L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d,$$

alors il existe un unique point fixe $\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{x})$ dans $\mathbb{R}^d$ et la méthode de point fixe converge pour tout vecteur initial $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^d$.

Partie algorithmique

Q. 1 *En utilisant le développement de $F(\boldsymbol{x})$ au $n^{ième}$ itéré $\boldsymbol{x}^{(n)}$:*

$$F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}^{(n)}) + J_F(\boldsymbol{x}^{(n)})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(n)}) + O(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(n)}\|^2),$$

déduire la méthode de Newton en dimension $d \ge 1$.

Q. 2 *Ecrire sur papier la fonction* `NewtonSyst` *permettant de calculer une valeur approchée d'une solution de $F(\boldsymbol{x}) = 0$ avec la méthode de Newton.*

Q. 3 *Ecrire l'algorithme de point fixe pour résoudre le problème*

$$\textit{trouver } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \textit{ tel que } G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}.$$

Q. 4 *Ecrire sur papier la fonction* `PointFixeSyst` *permettant de calculer une valeur approchée d'une solution de $F(\boldsymbol{x}) = 0$ avec la méthode du point fixe.*

Partie programmation

Q. 1 *Ecrire la fonction Matlab* `NewtonSyst`*, et valider cette fonction sur des exemples simples.*

Q. 2 *On considère le système d'équations non linéaires*

$$e^{x_1^2+x_2^2} - 1 = 0, \; e^{x_1^2-x_2^2} - 1 = 0.$$

Quelle est l'unique solution $\boldsymbol{x}^*$ de ce système ? Tester votre programme avec $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0.1, 0.1)^t$, puis $\boldsymbol{x}^{(0)} = (10, 10)^t$ et $\boldsymbol{x}^{(0)} = (20, 20)^t$. Qu'observez-vous ?

Q. 3 *Ecrire la fonction Matlab* `PointFixeSyst`*, et valider cette fonction sur des exemples simples.*

Q. 4 *On considère le système non linéaire :*

$$F(\boldsymbol{x}) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, 2x_1 + x_2 - 1)^t = 0.$$

a) Calculer les deux solutions $\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^* \in \mathbb{R}^2$ de $F(\boldsymbol{x}) = 0$.
b)Utiliser, pour résoudre ce problème, deux méthodes de point fixe définies par les fonctions d'itération

$$G_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - x_2}{2} \\ \\ \sqrt{1 - x_1^2} \end{pmatrix}, \quad G_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - x_2}{2} \\ \\ -\sqrt{1 - x_1^2} \end{pmatrix}.$$

Appliquer votre programme avec une tolérance de 10^{-10} et en partant de $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-0.9, 0.9)^t$ pour la première méthode (avec G_1) et de $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0.9, 0.9)^t$ pour la seconde (avec G_2). Comparer le nombre d'itération à convergence, obtenu pour ces deux méthodes. Expliquer cette différence en comparant les rayons spectraux de $J_{G_1}(\boldsymbol{x}_1^*)$ et $J_{G_2}(\boldsymbol{x}_2^*)$.