SuP Galilée, MACS 1 **Initiations aux Projets Numériques**
Année 2008-2009

Partiel du 23 Janvier 2009

Proposé par C. Japhet

Durée 3h

Aucun document autorisé. L'usage d'internet est interdit. Seul l'accès au compte personnel du Sercal de l'étudiant est autorisé.

Exercice 1 [6 pts]
On se propose de vérifier expérimentalement (à l'aide d'un ordinateur) la formule de Stirling-de Moivre :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{n!\, e^n} \quad = \quad 1.$$

Implémenter en Matlab, dans un premier temps, une fonction DemoivreNaïve permettant de calculer de façon la plus simple

$$a_n := \frac{b_n}{c_n}, \qquad \text{avec } b_n := \sqrt{2\pi n}\, n^n, \quad \text{et } c_n := n!\, e^n,$$

pour une valeur de n donné. Cette fonction calculera, pour un n donné, b_n, puis c_n puis a_n. Cette fonction permet-elle de choisir n aussi grand que possible ? Jusqu'à quelle valeur de n arrive-t-on à calculer a_n ? Pourquoi ?

La priorité ici étant de pouvoir faire le calcul pour n grand, reformuler le calcul de a_n et proposer une nouvelle fonction Demoivre. Implémenter cette fonction en Matlab et vérifiez que pour n grand a_n tend vers 1. On ne se préoccupera pas du coût du calcul.

Exercice 2 [4 pts]
1) Proposez une fonction Matlab Matrice2Vecteur ayant pour donnée une matrice M de taille $n \times m$ et renvoyant un vecteur V de longueur nm contenant les éléments de M par ligne

Exemple pour $n = 2$ et $m = 3$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

2) Ecrivez la fonction Matlab Vecteur2Matrice réalisant l'opération inverse.

Exercice 3 [6 pts] Soit $f \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 s'annulant en un point $x_\star \in (a, b)$. Si, pour x donné, on sait calculer $f(x)$ et $f'(x)$, alors on peut utiliser la méthode de Newton pour trouver une valeur approchée de $x_\star$. La méthode est la suivante : on se donne $x_0 \in \mathbf{R}$, puis on construit par recurrence :

$$x_{n+1} \quad := \quad x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \qquad n \geq 0. \tag{1}$$

Théorème 1. *Si f est de classe C^2 et si $f'(x_\star) \neq 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $x_0 \in (x_\star - \varepsilon, x_\star + \varepsilon)$, on a*

$$|x_n - x_\star| \quad \leq C^{-1}(C|x_0 - x_\star|)^{2^n} \qquad \forall n \geq 0,$$

avec $C = 2\|f''\|_\infty \,/\, |f'(x^\star)|$.

1) Ecrivez une fonction Matlab NEWTON permettant d'approcher par la méthode de Newton un zéro $x_\star$ d'une fonction f donnée. La fonction devra renvoyer une valeur approchée de $x_\star$ et le nombre d'itérations.

La méthode de Newton est très rapide, mais elle peut ne pas fonctionner quand le point de départ x_0 ne satisfait pas les hypothèses du Théorème. Pour cette raison, on utilise un méthode d'approche de $x_\star$, moins performante, mais plus fiable : la dichotomie.

On part d'un intervalle $[a, b]$ pour lequel on a $f(a)f(b) < 0$. On applique la méthode de Newton en partant de $x_0 = (a + b)/2$. Si la méthode de Newton ne converge pas ou si elle renvoie une solution qui n'est pas dans l'intervalle $[a, b]$, alors, on fait un pas de dichotomie : on obtient un intervalle $[a_1, b_1]$ et on recommence ...

2) Ecrire une fonction Matlab DICHONEWTON réalisant la méthode précédente.

3) Proposer un exemple de validation en Matlab pour les deux fonctions NEWTON et DICHONEWTON.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ [4 pts]

Exemple d'application de la méthode de dichotomie [1].

Supposons que vous êtes l'opérateur règlant la lumière durant le tournage d'un film à Hollywood. Vos lampes sont construites comme sur la figure 1.

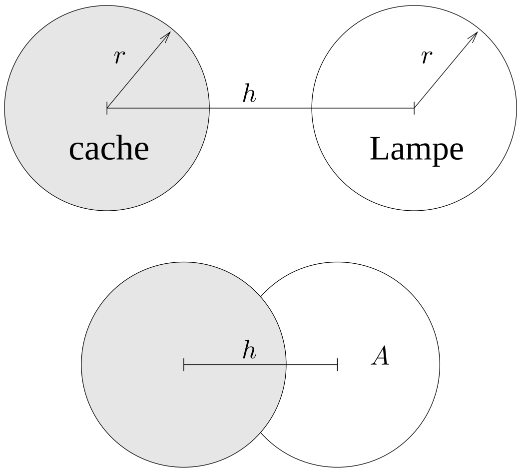

FIG. 1 – Lampe simple avec un cache pour ajuster la quantité de lumière

Supposons pour simplifier que le rayon de la lampe et du chache sont $r = 1$. Alors, en tant qu'opérateur de la lampe, vous ameriez savoir comment ajuster la distance h pour obtenir une certaine quantité de lumière, donc ce qui vous intéresse c'est la fonction $h = h(A)$.

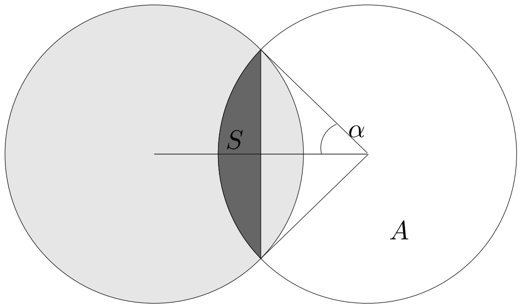

FIG. 2 – Cache couvrant la lampe partiellement

En utilisant la figure 2 on voit que l'aire non recouverte de la lampe A est donnée par

$$\begin{aligned} A(h) &= \pi r^2 - 2s \\ &= \pi - 2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha \\ &= \pi - 2\arccos\frac{h}{2} + h\sqrt{1-\left(\frac{h}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Donc c'est facile d'obtenir la fonction $A(h)$, mais on ne peut pas trouver la fonction inverse $h(A)$ analytiquement. On la cherche donc numériquement en cherchant une racine de la fonction

$$f(h) := A(h) - A = \pi - 2\arccos\frac{h}{2} + h\sqrt{1-\left(\frac{h}{2}\right)^2} - A = 0$$

pour une valeur donnée A. Comme il n'y a qu'une seule position du cache pour une aire A donnée, l'équation précédente a une et une seule solution.

Ecrire un programme Matlab utilisant la méthode de dichotomie pour trouver la solution. Justifier pourquoi on peut utiliser cette méthode.

Références

[1] M.J. Gander and W. Gander. *Scientific Computing. An introduction using MAPLE and MATLAB*, to appear.