Sup'Galilée
MACS1

Année 2020/2021

Analyse numérique - TD2 & TD3 - Corrigé
Algèbre linéaire

Notation (voir le cours) :
• le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est noté $\mathbf{0}_n$ ou $\mathbf{0}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.
• la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $\mathbb{O}_n$ ou $\mathbb{O}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité. La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ est notée $\mathbb{O}_{n,k}$.
• la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $\mathbb{I}_n$.

---

1 (TD2) Matrices

Exercice 1 (Matrices "blocs")

On considère les matrices blocs

$$\mathbb{A}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\mathbb{C}&\mathbb{I}\\\mathbb{I}&\mathbb{O}\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\mathbb{B}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 1&2&4&3\\3&4&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\mathbb{I}&\mathbb{O}\\\mathbb{C}&\mathbb{D}\end{pmatrix}$$

avec $\mathbb{O}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et

$$\mathbb{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad\mathbb{C}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\quad\text{et}\quad\mathbb{D}=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}.$$

1. Calculer les matrices $\mathbb{AB}$ et $\mathbb{BA}$ en utilisant l'écriture bloc.
2. Calculer la matrice $(2\mathbb{B}-\mathbb{A})(\mathbb{B}+\mathbb{A})$ en fonction des matrices $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{I}$.

Correction

1. Chaque bloc de $\mathbb{A}$ et de $\mathbb{B}$ étant dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on peut faire le produit matriciel par blocs, et l'on obtient :

$$\mathbb{AB}=\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{C}&\mathbb{I}\\\hline\mathbb{I}&\mathbb{O}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{I}&\mathbb{O}\\\hline\mathbb{C}&\mathbb{D}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}2\mathbb{C}&\mathbb{D}\\\hline\mathbb{I}&\mathbb{O}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&4&4&3\\6&8&2&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\mathbb{BA}=\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{I}&\mathbb{O}\\\hline\mathbb{C}&\mathbb{D}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{C}&\mathbb{I}\\\hline\mathbb{I}&\mathbb{O}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{C}&\mathbb{I}\\\hline\mathbb{C}^2+\mathbb{D}&\mathbb{C}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\\\hline 11&13&1&2\\17&23&3&4\end{array}\right)$$

2. On a

$$\begin{aligned}(2\mathbb{B}-\mathbb{A})(\mathbb{B}+\mathbb{A})&=\left(\begin{array}{c|c}2\mathbb{I}-\mathbb{C}&-\mathbb{I}\\\hline 2\mathbb{C}-\mathbb{I}&2\mathbb{D}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{C}+\mathbb{I}&\mathbb{I}\\\hline\mathbb{I}+\mathbb{C}&\mathbb{D}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}(2\mathbb{I}-\mathbb{C})(\mathbb{C}+\mathbb{I})-\mathbb{I}(\mathbb{I}+\mathbb{C})&(2\mathbb{I}-\mathbb{C})\mathbb{I}-\mathbb{ID}\\\hline(2\mathbb{C}-\mathbb{I})(\mathbb{C}+\mathbb{I})+2\mathbb{D}(\mathbb{I}+\mathbb{C})&(2\mathbb{C}-\mathbb{I})\mathbb{I}+2\mathbb{DD}\end{array}\right)\\&=\left(\begin{array}{c|c}2\mathbb{C}+2\mathbb{I}-\mathbb{C}^2-\mathbb{C}-\mathbb{I}-\mathbb{C}&2\mathbb{I}-\mathbb{C}-\mathbb{D}\\\hline 2\mathbb{C}^2+2\mathbb{C}-\mathbb{C}-\mathbb{I}+2\mathbb{D}+2\mathbb{DC}&2\mathbb{C}-\mathbb{I}+2\mathbb{D}^2\end{array}\right)\\&=\left(\begin{array}{c|c}-\mathbb{C}^2+\mathbb{I}&2\mathbb{I}-\mathbb{C}-\mathbb{D}\\\hline 2\mathbb{C}^2+\mathbb{C}-\mathbb{I}+2\mathbb{D}+2\mathbb{DC}&2\mathbb{D}^2+2\mathbb{C}-\mathbb{I}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}-6&-10&-3&-5\\-15&-21&-5&-3\\\hline 48&68&45&34\\47&65&26&21\end{array}\right)\end{aligned}$$

Remarque. *Le principe de multiplication se fait comme dans le cas par points, mais il faut respecter l'**ordre des multiplications** dans le cas par blocs. Par exemple, lors du calcul de* $(2\mathbb{B}-\mathbb{A})(\mathbb{B}+\mathbb{A})$*, pour calculer le bloc en bas à gauche on a :*

$$(2\mathbb{C}-\mathbb{I})(\mathbb{C}+\mathbb{I})+2\mathbb{D}(\mathbb{I}+\mathbb{C})\neq(\mathbb{C}+\mathbb{I})(2\mathbb{C}-\mathbb{I})+(\mathbb{I}+\mathbb{C})(2\mathbb{D}).$$

*De plus il faut vérifier que les matrices sont **blocs compatibles** pour la multiplication. Par exemple dans la question 1, pour pouvoir faire le produit par blocs* $\mathbb{AB}$*, il faut vérifier que le nombre de colonnes de* $\mathbb{C}$ *est égal au nombre de lignes de* $\mathbb{I}$*, de façon à pouvoir écrire* $\mathbb{C}*\mathbb{I}$*, et vérifier cela pour tous les autres produits blocs qui interviennent dans la multiplication (par blocs) de* $\mathbb{A}$ *par* $\mathbb{B}$*.*

Exercice 3 (Résolution de systèmes linéaires triangulaires)

Soit $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible, et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

1. Calculer $\det(\mathbb{L})$.
2. *(algo)* Résoudre $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et écrire l'algorithme (fonction RESTRIINF) permettant de résoudre ce problème. Calculer le coût de cet algorithme.

Correction

1. On note $\mathbb{L} = (\ell_{i,j})_{1\leqslant i,j,\leqslant n}$. On va montrer, par une récurrence sur n (la taille de la matrice $\mathbb{L}$), que $\det(\mathbb{L}) = \prod_{i=1}^{n} \ell_{i,i}$:
• pour $n = 1$ on a $\det(\mathbb{L}) = \ell_{1,1}$ la propriété est vraie ;
• hypothèse de récurrence : on suppose que pour $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure on a $\det(\mathbb{L}) = \prod_{i=1}^{n} \ell_{i,i}$.
Soit $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. On veut montrer que $\det(\mathbb{L}) = \prod_{i=1}^{n+1} \ell_{i,i}$. Comme on souhaite utiliser l'hypothèse de récurrence, on va décomposer $\mathbb{L}$ en 2×2 blocs, dont un bloc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que l'on écrit $\mathbb{L}$ sous la forme bloc suivante :

$$\mathbb{L} = \left(\begin{array}{c|c} \ell_{1,1} & 0 \cdots 0 \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathbb{L}_n \\ \times & \end{array}\right), \qquad \text{avec } \mathbb{L}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Ici la matrice $\mathbb{L}_n$ est la matrice obtenue à partir de $\mathbb{L}$ en supprimant la ligne 1 et la colonne 1. Pour calculer $\det(\mathbb{L})$, on développe maintenant suivant la 1-ère ligne, et l'on obtient

$$\det(\mathbb{L}) = \ell_{1,1} \det(\mathbb{L}_n). \tag{1}$$

On peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour $\mathbb{L}_n$: $\det(\mathbb{L}_n) = \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{L}_n)_{ii} = \prod_{i=2}^{n+1} \ell_{i,i}$.
Puis de l'égalité (1), on obtient $\det(\mathbb{L}) = \ell_{1,1} \prod_{i=2}^{n+1} \ell_{i,i} = \prod_{i=1}^{n+1} \ell_{i,i}$. La propriété est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure, on a $\det(\mathbb{L}) = \prod_{i=1}^{n} \ell_{i,i}$.

2. Comme $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure inversible, on va pouvoir calculer facilement $\boldsymbol{x}$ par substitution.
Observons d'abord que $\mathbb{L}$ est inversible équivaut à $\det(\mathbb{L}) \neq 0$, ce qui équivaut encore, d'après la question 1 à

$$\ell_{i,i} \neq 0, \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \tag{2}$$

(car $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure). Maintenant écrivons le système, on a :

$$\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \ell_{i,1} & \cdots & & \ell_{i,i} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ \ell_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff (\mathbb{L}\boldsymbol{x})_i = b_i, \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

On observe que la première ligne du système s'écrit : $\ell_{1,1} x_1 = b_1$. Elle permet ainsi de calculer x_1 : on a $x_1 = \frac{b_1}{\ell_{1,1}}$ (ici on peut diviser par $\ell_{1,1}$ d'après (2)). Connaissant x_1, on va pouvoir calculer x_2 avec la deuxième ligne du système qui s'écrit : $\ell_{2,1} x_1 + \ell_{2,2} x_2 = b_2$. On obtient $x_2 = \frac{1}{\ell_{2,2}}(b_2 - \ell_{2,1} x_1)$ (ici on peut diviser par $\ell_{2,2}$ d'après (2)). Puis connaissant x_1 et x_2, on va pouvoir calculer x_3 avec la troisième ligne du système, etc...
Ecrivons maintenant la formule permettant de calculer les x_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad &\iff \quad (\mathbb{L}\boldsymbol{x})_i = b_i, \ \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \iff \quad \sum_{j=1}^{n} \ell_{i,j} x_j = b_i, \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \\ &\iff \quad \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{i,j} x_j + \ell_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \ell_{i,j} x_j = b_i, \ \forall i \in [\![1, n]\!]. \end{aligned}$$

Or $\ell_{i,j} = 0$ pour $j > i$, si bien que la seconde somme du terme de gauche est nulle et l'on a

$$\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \iff \quad \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{i,j} x_j + \ell_{i,i} x_i = b_i, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

D'après (2), on obtient

$$\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad x_i = \frac{1}{\ell_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{i,j} x_j\right), \ \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{3}$$

Notons ici que pour $i = 1$ l'équation (3) s'écrit : $x_1 = \frac{b_1}{\ell_{1,1}}$.
Pour calculer $\boldsymbol{x}$, on procède de la manière suivante : on commence par calculer $x_1 = \frac{b_1}{\ell_{1,1}}$. Puis, on substitue x_1 dans la deuxième équation ((3) pour $i = 2$), on obtient $x_2 = \frac{1}{\ell_{2,2}}(b_2 - \ell_{2,1}x_1)$. Ensuite, on substitue x_1 et x_2 dans la troisième équation ((3) pour $i = 3$), et on obtient x_3. A l'étape $i \leqslant n$, on substitue $x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}$ (déjà calculés) dans l'équation (3) et l'on obtient x_i. Dans l'algorithme ci-dessous, $\ell_{i,j}$ est noté $L(i,j)$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Algorithm 1 Fonction ResTriInf : résout un système linéaire triangulaire inférieur inversible

Données : $\mathbb{L}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure inversible
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$

Résultat : $\boldsymbol{x}$: le vecteur de $\mathbb{C}^n$ tel que $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ ResTriInf$(\mathbb{L}, \boldsymbol{b})$
  $n \leftarrow$ length$(\boldsymbol{b})$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire** ▷ boucle pour le calcul de $x(i)$
    s $\leftarrow 0$
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i - 1$ **faire** ▷ boucle pour le calcul de $s = \sum_{j=1}^{i-1} L(i,j) * x(j)$
      $s \leftarrow s + L(i,j) * x(j)$
    fin Pour
    $x(i) \leftarrow (b(i) - s)/L(i,i)$
  fin Pour
fin Fonction

Remarque. *Le calcul s'effectue nécessairement de $x(1)$ à $x(n)$.*

Remarque. *Dans les algorithmes du cours et du TD, on ne teste pas que les données vérifient les hypothèses. Par exemple ici dans l'algorithme 1, on ne vérifie pas les dimensions des données ainsi que le caractère inversible de la matrice. Il est donc important de ne pas oublier de préciser ces hypothèses (matrice triangulaire, inversible,...) dans les données de l'algorithme.*

Calculons le coût temporel (ou la complexité) de l'algorithme 1, i.e. le nombre d'opérations élémentaires (additions/soustractions et multiplications/divisions) effectuées par l'algorithme, en fonction de la taille n des données.
Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, le calcul de la variable s (boucle intérieure sur j) nécessite $i - 1$ multiplications (ou divisions) et $i - 1$ additions (ou soustractions). Le calcul de $x(i)$ requiert donc i multiplications/divisions et i additions/soustractions. Finalement, le nombre total de multiplications/divisions N^*_{inf} est donc

$$N^*_{\text{inf}} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}.$$

De manière similaire, le nombre total d'additions/soustractions N^+_{inf} est donc de

$$N^+_{\text{inf}} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}.$$

Ici on ne compte pas les additions cachées dans les incréments des boucles sur i et j (i.e. pour $i \leftarrow i + 1$ et $j \leftarrow j + 1$).

Exercice 4 (Produit et inverse de matrices triangulaires)

Soient $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}^{(1)}$, $\mathbb{L}^{(2)}$ des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où $\mathbb{L} = (\ell_{i,j})_{1 \leqslant i,j, \leqslant n}$, et $\mathbb{L}^{(k)} = (\ell^{(k)}_{i,j})_{1 \leqslant i,j, \leqslant n}$, $k = 1, 2$.

1. Que peut-on dire des matrices $\mathbb{L}^*$ et $(\mathbb{L}^*)^*$?
2. Montrer que $\mathbb{C} = \mathbb{L}^{(1)}\mathbb{L}^{(2)}$ est triangulaire inférieure, et que $c_{i,i} = \ell^{(1)}_{i,i}\ell^{(2)}_{i,i}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
3. Déterminer les valeurs propres de $\mathbb{L}$.
4. A quelle(s) conditions la matrice $\mathbb{L}$ est-elle inversible ?
5. On suppose que $\mathbb{L}$ est inversible et on note $\mathbb{M} = \mathbb{L}^{-1}$. Montrer que $\mathbb{M}$ est triangulaire inférieure avec

$$m_{i,i} = \frac{1}{\ell_{i,i}}, \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Correction

1. Par définition de $\mathbb{L}^*$, on a $(\mathbb{L}^*)_{i,j} = \overline{\ell_{j,i}},\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. La matrice $\mathbb{L}$ étant triangulaire inférieure, on a $\ell_{i,j} = 0$ pour $i < j$. Alors on a $\ell_{j,i} = 0$ pour $j < i$, donc $\overline{\ell_{j,i}} = 0$ pour $j < i$, c'est-à-dire $(\mathbb{L}^*)_{i,j} = 0$ pour $j < i$. La matrice $\mathbb{L}^*$ est donc triangulaire supérieure. Comme $(\mathbb{L}^*)^* = \mathbb{L}$, cette matrice est donc triangulaire inférieure.

2. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n \ell_{i,k}^{(1)} \ell_{k,j}^{(2)}$, avec $\ell_{i,k}^{(1)} = 0$ si $i < k$ et $\ell_{k,j}^{(2)} = 0$ si $k < j$.
Montrons que $c_{i,j} = 0$ si $i < j$. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $j \in [\![i+1, n]\!]$. On a

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n \ell_{i,k}^{(1)} \ell_{k,j}^{(2)} = \sum_{k=1}^i \ell_{i,k}^{(1)} \underbrace{\ell_{k,j}^{(2)}}_{=0 \text{ car } k<j} + \sum_{k=i+1}^n \underbrace{\ell_{i,k}^{(1)}}_{=0 \text{ car } i<k} \ell_{k,j}^{(2)}.$$

Donc $c_{i,j} = 0$ si $i < j$, ce qui signifie que la matrice $\mathbb{C}$ est triangulaire inférieure.
Pour $i = j$, on a

$$c_{i,i} = \sum_{k=1}^n \ell_{i,k}^{(1)} \ell_{k,i}^{(2)} = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{i,k}^{(1)} \underbrace{\ell_{k,i}^{(2)}}_{=0 \text{ car } k<i} + \ell_{i,i}^{(1)} \ell_{i,i}^{(2)} + \sum_{k=i+1}^n \underbrace{\ell_{i,k}^{(1)}}_{=0 \text{ car } i<k} \ell_{k,i}^{(2)}.$$

Par conséquent $c_{i,i} = \ell_{i,i}^{(1)} \ell_{i,i}^{(2)},\ \forall i \in [\![1,n]\!]$.

Remarque. *On peut aussi montrer le résultat par récurrence sur n, en utilisant une décomposition en 2×2 blocs de $\mathbb{L}^{(1)}$ et $\mathbb{L}^{(2)}$:*
• *pour $n = 1$ on a $\mathbb{L}^{(1)}\mathbb{L}^{(2)} = (\ell_{1,1}^{(1)} \ell_{1,1}^{(2)})$ et la propriété est vraie ;*
• *hypothèse de récurrence : pour $\mathbb{L}^{(1)}, \mathbb{L}^{(2)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaires inférieures, la matrice $\mathbb{L}^{(1)}\mathbb{L}^{(2)}$ est triangulaire inférieure.*
Soient $\mathbb{L}^{(1)}, \mathbb{L}^{(2)} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. On veut montrer que $\mathbb{L}^{(1)}\mathbb{L}^{(2)}$ est triangulaire inférieure. Comme on souhaite utiliser l'hypothèse de récurrence, on va décomposer $\mathbb{L}^{(i)}$, $i = 1,2$, en 2×2 blocs, dont un bloc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que l'on écrit :

$$\mathbb{L}^{(i)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}^{(i)} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{B}^{(i)} & \ell_{n+1,n+1}^{(i)} \end{array}\right), \quad i = 1,2. \qquad \text{Alors on a} \quad \mathbb{L}^{(1)}\mathbb{L}^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}^{(1)}\mathbb{A}^{(2)} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \ell_{n+1,n+1}^{(1)} \ell_{n+1,n+1}^{(2)} \end{array}\right),$$

avec $\mathbb{A}^{(i)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{B}^{(i)} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C} = \mathbb{B}^{(1)}\mathbb{A}^{(2)} + \ell_{n+1,n+1}^{(1)}\mathbb{B}^{(2)}$. L'hypothèse de récurrence nous donne $\mathbb{A}^{(1)}\mathbb{A}^{(2)}$ triangulaire inférieure, et donc $\mathbb{L}^{(1)}\mathbb{L}^{(2)}$ l'est aussi.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbb{L}^{(1)}, \mathbb{L}^{(2)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaires inférieures, la matrice $\mathbb{L}^{(1)}\mathbb{L}^{(2)}$ est triangulaire inférieure.

3. Les valeurs propres de $\mathbb{L}$ sont les racines du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{\mathbb{L}}(\lambda) = \det(\mathbb{L} - \lambda\mathbb{I})$. La matrice $\mathbb{L} - \lambda\mathbb{I}$ étant également triangulaire inférieure, d'après l'exercice 3 question 1 on a $\det(\mathbb{L} - \lambda\mathbb{I}) = \prod_{i=1}^n (\ell_{i,i} - \lambda)$, donc les valeurs propres de $\mathbb{L}$ sont $\lambda_i = \ell_{i,i}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$.

4. La matrice $\mathbb{L}$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, donc

$$\mathbb{L} \text{ inversible} \iff (\ell_{i,i} \neq 0,\ \forall i \in [\![1,n]\!]) \iff (\lambda_i \neq 0,\ \forall i \in [\![1,n]\!]).$$

5. Par définition de $\mathbb{L}^{-1}$, on a $\mathbb{L}\mathbb{L}^{-1} = \mathbb{I}$, c'est-à-dire $\mathbb{L}\boldsymbol{x}^{(i)} = \boldsymbol{e}^{(i)}$, $i \in [\![1,n]\!]$, où $\boldsymbol{x}^{(i)}$ est le i-ème vecteur colonne de $\mathbb{L}^{-1}$ et $\boldsymbol{e}^{(i)}$ le i-ème vecteur de la base canonique : $(\boldsymbol{e}^{(i)})^t = (0, \cdots, 0, \underset{i}{1}, 0, \cdots, 0)$. En résolvant ce système, on trouve $(\boldsymbol{x}^{(i)})_k = 0$, pour $1 \leqslant k \leqslant i-1$, et $(\boldsymbol{x}^{(i)})_i = \frac{1}{\ell_{i,i}}$. Ainsi $\mathbb{L}^{-1}$ est triangulaire inférieure avec $(\mathbb{L}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{\ell_{i,i}}$, pour $i \in [\![1,n]\!]$.

Exercice 5 (Matrices hermitiennes définies positives)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne.

1. Montrer que $(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ et en déduire que les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont réelles.
2. Montrer que $\mathbb{A}$ est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.
3. En déduire que $\mathbb{A}$ est inversible.

Correction

1. On désige par $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire hermitien, et on rappelle sa définition vue en cours :

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i, \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n.$$

Exercice à faire à la maison : soit $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mathbb{A}^* = (\overline{a_{ji}})$ la matrice adjointe de $\mathbb{A}$. Montrer que

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \mathbb{A}^*\boldsymbol{v}), \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n.$$

Ici on a donc

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) &= (\boldsymbol{u}, \mathbb{A}^*\boldsymbol{u}) && \text{(par propriété de la matrice adjointe)} \\
&= (\boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u}) && \text{(car } \mathbb{A} = \mathbb{A}^*\text{)} \\
&= \overline{(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})} && \text{(par propriété du produit scalaire hermitien, i.e } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n\text{)},
\end{aligned}$$

et donc $(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}$, pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$.

2. • Supposons que $\mathbb{A}$ est définie positive, c'est-à-dire que $(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0,\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n,\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Soit λ une valeur propre de $\mathbb{A}$. On veut montrer que $\lambda > 0$. Pour cela on va relier λ à un terme de la forme $(\mathbb{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$, c'est-à-dire que l'on prend $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$) un vecteur propre associé à λ. Alors par définition on a $\mathbb{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Ceci entraîne que

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &= (\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \\
&= \overline{\lambda}\|\boldsymbol{v}\|^2 && \text{(par propriété du produit scalaire hermitien, i.e } (\alpha\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n,\ \forall \alpha \in \mathbb{C}\text{)}.
\end{aligned}$$

Comme $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ (donc $\|\boldsymbol{v}\| \neq 0$), on obtient $\overline{\lambda} = \frac{(\mathbb{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$. Maintenant, comme $(\mathbb{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$, on obtient $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ et donc $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. Ainsi on a $\lambda = \frac{(\mathbb{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$. De plus, comme $(\mathbb{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$ (puisque $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$), alors on a $\lambda > 0$.

• Réciproquement, supposons que toutes les valeurs propres $\lambda_i,\ i \in [\![1, n]\!]$ sont strictement positives. On veut montrer que $(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0,\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n,\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Ainsi il faudrait pouvoir relier $(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$, pour $\boldsymbol{u}$ **quelconque** dans $\mathbb{C}^n$, aux valeurs propres de $\mathbb{A}$. Pour cela on utilise la diagonalisation d'une matrice (si on peut le faire) : d'après la feuille de rappel sur la réduction des matrices, la matrice $\mathbb{A}$ étant hermitienne, il existe une matrice $\mathbb{U}$ unitaire telle que la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit diagonale. Les éléments diagonaux de $\mathbb{D}$ sont les valeurs propres de $\mathbb{A}$, et pour $j \in [\![1, n]\!]$, le j-ème vecteur colonne $\boldsymbol{u}^{(j)}$ de la matrice $\mathbb{U}$ est un vecteur propre de $\mathbb{A}$ associé à la valeur propre λ_j.
Soit maintenant $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &= (\mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \\
&= (\mathbb{D}\mathbb{U}^*\boldsymbol{v}, \mathbb{U}^*\boldsymbol{v}) && \text{(par propriété de la matrice adjointe),} \\
&= (\mathbb{D}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) && \text{(en posant } \boldsymbol{y} = \mathbb{U}^*\boldsymbol{v}\text{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2 && \text{(car } \mathbb{D} \text{ est diagonale, avec } d_{i,i} = \lambda_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in [\![1, n]\!]\text{)}.
\end{aligned}$$

Or $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ et $\mathbb{U}^*$ inversible, donc $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. cela signifie qu'il existe au moins un entier p tel que $y_p \neq 0$. Ainsi

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \lambda_p |y_p|^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n} \lambda_i |y_i|^2 > 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$, alors $\mathbb{A}$ est définie positive.

3. Comme

$$\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^{-1}) = \det(\mathbb{U})\det(\mathbb{D})\det(\mathbb{U}^{-1}) = \det(\mathbb{U})\det(\mathbb{D})\frac{1}{\det(\mathbb{U})} = \det(\mathbb{D}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

alors $\det(\mathbb{A}) > 0$ (donc non nul) et ainsi $\mathbb{A}$ est inversible. Notons que $|\det(\mathbb{U})| = 1$.

2 (TD3) Normes vectorielles, matricielles et suites de vecteurs

Exercice 8 (Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle)

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On définit l'application $\|\cdot\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

1. Montrer que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\| = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|.$$

2. Montrer que $\|\cdot\|_s$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et montrer qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\|\boldsymbol{v}\| \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n,$$
$$\|\mathbb{I}\|_s = 1.$$

Correction

1. Le sous-ensemble $\mathbb{K}_1 := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n,\ \|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1\}$ (resp. $\mathbb{K}_2 := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n,\ \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$) est fermé borné dans $\mathbb{K}^n$, donc compact (car on est en dimension finie). Alors l'application $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \mapsto \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}$, qui est continue sur $\mathbb{K}_1$ (resp. $\mathbb{K}_2$) atteint ses bornes. On peut donc introduire $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{K}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ avec $\|\boldsymbol{w}\| \leqslant 1$ et $\|\boldsymbol{z}\| = 1$ tels que

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|, \qquad \|\mathbb{A}\boldsymbol{z}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|.$$

• Montrons que $\sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$. Comme $\|\boldsymbol{w}\| \leqslant 1$, on a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| \leqslant \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|}{\|\boldsymbol{w}\|} \leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

De plus, pour $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, on a

$$\frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} = \|\mathbb{A}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}\right)\| \leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \qquad (\text{car } \|\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}\| = 1 \leqslant 1),$$

donc $\sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$.

Pour montrer que $\sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\boldsymbol{z}\|$, on procède de la même façon que ci-dessus.

2. Soit $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors par définition on a $\|\mathbb{A}\|_s \geqslant 0$, et

(a)

$$\begin{aligned}
\|A\|_s = 0 &\iff \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = 0 \\
&\iff \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = 0,\ \forall \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0} \qquad (\text{car } \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \geqslant \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|},\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n,\ \boldsymbol{u} \neq 0) \\
&\iff \mathbb{A}\boldsymbol{u} = 0,\ \forall \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0} \qquad (\text{par propriété de la norme vectorielle } \|\cdot\| \text{ sur } \mathbb{K}^n) \\
&\iff \mathbb{A} = \mathbb{O}_n.
\end{aligned}$$

(b) Si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned}
\|\alpha\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\alpha\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} |\alpha|\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \qquad (\text{par propriété de la norme vectorielle } \|\cdot\| \text{ sur } \mathbb{K}^n) \\
&= |\alpha| \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = |\alpha|\|\mathbb{A}\|_s.
\end{aligned}$$

(c) On a

$$\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v} + \mathbb{B}\boldsymbol{v}\|.$$

Or par propriété de la norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$ (inégalité triangulaire), on a, pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ avec $\|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1$:

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v} + \mathbb{B}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| + \|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s.$$

Ce entraîne que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v} + \mathbb{B}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s,$$

c'est-à-dire $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s$.

(d) On a

$$\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|.$$

Or par définition de $\|\cdot\|_s$, on a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\|\boldsymbol{v}\| \ \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n. \tag{4}$$

En effet, cela est vrai si $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. Prenons maintenant $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$. On a

$$\frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s.$$

Prenons maintenant $\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n$ avec $\|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1$. En utilisant deux fois (4), on obtient

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\mathbb{B}\boldsymbol{v}\| = \|\mathbb{A}(\mathbb{B}\boldsymbol{v})\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\| &\leqslant \|\mathbb{A}\|_s\|\mathbb{B}\|_s\|\boldsymbol{v}\| \\ &\leqslant \|\mathbb{A}\|_s\|\mathbb{B}\|_s \qquad (\text{car } \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n$ avec $\|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1$, on a en particulier

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\mathbb{B}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\|\mathbb{B}\|_s,$$

c'est-à-dire $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\|\mathbb{B}\|_s$.

Exercice 9 (Rayon spectral)

1. Soit $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\|\cdot\|_s$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|_v$. Montrer que

$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|_s.$$

2. On note maintenant $\|\cdot\|$ une norme matricielle **quelconque**. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$ et soit $\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^n\backslash\{\mathbf{0}\}$ un vecteur propre associé à λ.
   (a) Montrer que la matrice $\mathbb{B}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est non nulle.
   (b) Montrer que
   $$\mathbb{A}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* = \lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$
   (c) En déduire que
   $$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|.$$
3. Quel résultat avez vous démontré ?

Correction

1. Soit λ une valeur propre de $\mathbb{A}$ et soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur propre associé. Alors $\mathbb{A}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$. Comme $\|\cdot\|_s$ est une norme subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_v$, on a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|_v \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\|\boldsymbol{u}\|_v. \tag{5}$$

Par ailleurs, puisque $\boldsymbol{u}\neq 0$,

$$\frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|_v}{\|\boldsymbol{u}\|_v} = \frac{\|\lambda\boldsymbol{u}\|_v}{\|\boldsymbol{u}\|_v} = |\lambda|. \tag{6}$$

En utilisant (5) dans (6) on obtient

$$|\lambda| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s.$$

L'inégalité précédente est valable quelle que soit la valeur propre λ. Donc,

$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|_s.$$

2.
(a) On note $\mathbb{B}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\mathbb{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\|\boldsymbol{u}\|_2^2$$

Comme $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$, alors $\boldsymbol{u}\|\boldsymbol{u}\|_2^2\neq\mathbf{0}$, donc $\mathbb{B}\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$. Ainsi on a $\mathbb{B}\neq\mathbb{O}$.

(b) Puisque $\mathbb{A}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$, alors

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* = \lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* \quad (\text{i.e. } \mathbb{A}\mathbb{B}=\lambda\mathbb{B}).$$

(c) On a, par la propriété des normes matricielles :

$$|\lambda|\|\mathbb{B}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\| = \|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|\|\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\| = \|\mathbb{A}\|\|\mathbb{B}\|.$$

Comme $\|\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\| \neq 0$ d'après (a) (car $\mathbb{B} \neq \mathbb{O} \Rightarrow \|\mathbb{B}\| \neq 0$), on en déduit que

$$|\lambda| \leqslant \|\mathbb{A}\|.$$

L'égalité précédente est valable quelle que soit la valeur propre λ. Donc,

$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|.$$

3. On a ainsi démontré que quelle que soit la norme matricielle choisie,

$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|.$$

Remarque. *On a également, d'après le cours, le résultat suivant : si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ (dépendant de $\mathbb{A}$ et de ε) telle que*

$$\|\mathbb{A}\|_{A,\varepsilon} \leqslant \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon.$$

Ce résultat, associé à celui de la question 3, montre que

$$\rho(\mathbb{A}) = \inf_{\|\cdot\|} \|\mathbb{A}\|,$$

l'infimum étant pris sur l'ensemble de toutes les normes subordonnées. Insistons sur le fait que le rayon spectral $\rho(\cdot)$ n'est pas une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais une semi-norme, c'est-à-dire qu'il vérifie toutes les propriétés d'une norme matricielle, à l'exception de la condition $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = \mathbb{O}_n$. En effet, par exemple pour $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\rho(\mathbb{A}) = 0$ et $\mathbb{A} \neq \mathbb{O}_n$.
Notons que dans le cas où $\mathbb{A}$ est une matrice hermitienne (i.e $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$), alors on a

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^2)} = \sqrt{\rho(\mathbb{A})^2} = \rho(\mathbb{A}).$$

Exercice 10 (Suite de vecteurs et de matrices)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{A}^k = \mathbb{O}$ alors $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{A}^k\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que si $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{A}^k\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\rho(\mathbb{A}) < 1.$$

3. Montrer que si $\rho(\mathbb{A}) < 1$, alors il existe au moins une norme matricielle subordonnée (notée $\|\cdot\|_s$) telle que

$$\|\mathbb{A}\|_s < 1.$$

4. Supposons qu'il existe une norme matricielle subordonnée (notée $\|\cdot\|_s$) telle que

$$\|\mathbb{A}\|_s < 1.$$

Montrer que $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{A}^k = \mathbb{O}$.
5. Conclure.

Correction

1. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_s$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$. Alors

$$\|\mathbb{A}^k\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}^k\|_s\|\boldsymbol{v}\|, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Or par hypothèse on a $\lim_{k\to+\infty} \|\mathbb{A}^k\|_s = 0$, ce qui entraîne, avec l'inégalité ci-dessus, que $\lim_{k\to+\infty} \|\mathbb{A}^k\boldsymbol{v}\|_s = 0$, pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

2. Rappelons que $\rho(\mathbb{A}) = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |\lambda_i(\mathbb{A})|$ où les λ_i, $i \in [\![1,n]\!]$, sont les valeurs propres de $\mathbb{A}$.

Montrons le résultat par l'absurde : supposons qu'il existe une valeur propre λ de $\mathbb{A}$ telle que $|\lambda| \geqslant 1$ et soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur propre associé à λ. Alors

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u},$$

ce qui entraîne, par récurrence sur k,

$$\mathbb{A}^k\boldsymbol{u} = \lambda^k\boldsymbol{u}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ceci entraîne que

$$\|\mathbb{A}^k\boldsymbol{u}\| = |\lambda|^k\|\boldsymbol{u}\| \geqslant \|\boldsymbol{u}\| > 0 \quad (\text{car } \boldsymbol{u} \text{ vecteur propre })$$

Donc $\mathbb{A}^k\boldsymbol{u}$ ne tend pas vers zéro lorsque k tend vers l'infini, ce qui contredit l'hypothèse : $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{A}^k\boldsymbol{v} = 0$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Donc $|\lambda| < 1$. Ceci étant vrai pour n'importe qu'elle valeur propre λ de $\mathbb{A}$, alors $\rho(\mathbb{A}) < 1$.

3. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après un théorème du cours, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe au moins une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|_s$ (qui dépend de ε et de $\mathbb{A}$) de telle que

$$\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \tag{7}$$

D'autre part, comme $\rho(\mathbb{A}) < 1$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $\rho(\mathbb{A}) < 1 - \eta$. On prend alors $\varepsilon = \eta$ dans (7) et l'on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \rho(\mathbb{A}) + \eta < 1 - \eta + \eta,$$

c'est-à-dire

$$\|\mathbb{A}\|_s < 1.$$

4. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par propriété des normes matricielles, on montre, par récurrence sur k, que

$$\|\mathbb{A}^k\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

En effet, la propriété (8) est vraie pour $k = 0$ puisque elle revient dans ce cas à $\|\mathbb{I}\|_s \leqslant 1$, ce qui est vrai car $\|\mathbb{I}\|_s = 1$ (puisque $\|\cdot\|_s$ est une norme suborbonnée). Supposons que la propriété (8) est vraie au rang k et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$: en utilisant la définition d'une norme matricielle (vue en cours), on a

$$\|\mathbb{A}^{k+1}\|_s = \|\mathbb{A}\mathbb{A}^k\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s\|\mathbb{A}^k\|_s,$$

puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient (8). L'inégalité (8) est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors, l'hypothèse $\|\mathbb{A}\|_s < 1$ et (8) entraînent que $\lim_{k\to+\infty} \|\mathbb{A}^k\| = 0$, ce qui signifie que $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{A}^k = \mathbb{O}$.

5. On en déduit que toutes les propriétés 1), 2), 3) et 4) sont équivalentes.

Exercice 11 (Convergence d'une méthode itérative)

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible, et deux matrices $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$. Soient $\boldsymbol{u}^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On considère l'algorithme

$$\mathbb{M}\,\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \mathbb{N}\,\boldsymbol{u}^{(k)} + \boldsymbol{b}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

1. A quelle condition l'algorithme (9) est-il bien défini ?

On pose $\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}$.

2. Montrer que si la suite $(\boldsymbol{u}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle converge vers la solution $\boldsymbol{u}$ du système $\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$.
3. Montrer que la suite $(\boldsymbol{u}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour toute donnée initiale $\boldsymbol{u}^{(0)}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Correction

1. L'algorithme (9) est bien défini si, quel que soit $\boldsymbol{u}^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, les termes $\boldsymbol{u}^{(k)}$ sont définis de manière unique. Ce sera le cas dès que la matrice $\mathbb{M}$ est inversible. Dans ce cas on a : $\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}\,\boldsymbol{u}^{(k)} + \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

2. Supposons que l'algorithme (9) converge. Alors, il existe un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que la suite $\boldsymbol{u}^{(k)}$ tende vers $\boldsymbol{u}$ quand k tend vers $+\infty$. Cela signifie donc, que pour toute norme $\|\cdot\|$ (définie sur $\mathbb{C}^n$),

$$\lim_{k\to+\infty} \|\boldsymbol{u}^{(k)} - \boldsymbol{u}\| = 0.$$

Comme $\|\mathbb{M}\boldsymbol{u}^{(k)} - \mathbb{M}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\mathbb{M}\|_s\|\boldsymbol{u}^{(k)} - \boldsymbol{u}\|$ (avec $\|\cdot\|_s$ une norme subordonnée à $\|\cdot\|$), ceci entraîne que

$$\lim_{k\to+\infty} \|\mathbb{M}\boldsymbol{u}^{(k)} - \mathbb{M}\boldsymbol{u}\| = 0.$$

De même on a $\lim_{k\to+\infty} \|\mathbb{N}\boldsymbol{u}^{(k)} - \mathbb{N}\boldsymbol{u}\| = 0$. En passant à la limite dans (9), on a ainsi

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\mathbb{M}\boldsymbol{u}^{(k+1)}\right) = \lim_{k\to+\infty} \left(\mathbb{N}\boldsymbol{u}^{(k)} + \boldsymbol{b}\right) \iff \mathbb{M}\boldsymbol{u} = \mathbb{N}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} \quad \iff \quad \underbrace{(\mathbb{M} - \mathbb{N})}_{=\mathbb{A}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \quad \iff \quad \mathbb{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}.$$

3. Comme $\mathbb{M}\boldsymbol{u} = \mathbb{N}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}$ et $\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}$, on a

$$\boldsymbol{u} = \mathbb{B}\boldsymbol{u} + \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u}^{(k+1)} = \mathbb{B}\boldsymbol{u}^{(k)} + \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

En posant $\boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{u}^{(k)} - \boldsymbol{u}$ (erreur à l'itération k), la différence des deux égalités précédentes donnent

$$\boldsymbol{e}^{(k+1)} = \mathbb{B}\boldsymbol{e}^{(k)}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

si bien que, par récurrence, on peut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\boldsymbol{e}^{(k)} = \mathbb{B}^k\boldsymbol{e}^{(0)},$$

où $\boldsymbol{e}^{(0)} = \boldsymbol{u}^{(0)} - \boldsymbol{u}$ est l'erreur commise lors de l'initialisation de l'algorithme. Donc l'algorithme converge si et seulement si

$$\lim_{k\to+\infty} \|\mathbb{B}^k\boldsymbol{e}^{(0)}\| = 0, \quad \forall \boldsymbol{e}^{(0)} \in \mathbb{C}^n.$$

D'après cours ou bien l'exercice 10, la caractérisation précédente est équivalente à $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Remarque.

- *Notons que dans le cas où $\mathbb{B}$ est hermitienne, on a $\rho(\mathbb{B}) = \|\mathbb{B}\|_2$. L'égalité (10) entraîne que*

$$\|\boldsymbol{e}^{(k+1)}\|_2 = \|\mathbb{B}\|_2\|\boldsymbol{e}^{(k)}\|_2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

  ou encore (puisqu'ici on a $\rho(\mathbb{B}) = \|\mathbb{B}\|_2$)

$$\|\boldsymbol{e}^{(k+1)}\|_2 = \rho(\mathbb{B})\|\boldsymbol{e}^{(k)}\|_2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

  et ainsi plus le rayon spectral de $\mathbb{B}$ est petit, plus l'algorithme (9) converge rapidement.
- *De façon générale, il est raisonnable de penser que la convergence de l'algorithme (9) est d'autant plus rapide que le rayon spectral de $\mathbb{B}$ est petit.*
- *La principale difficulté consiste à choisir $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$ afin que $\rho(\mathbb{B}) < 1$ (et soit le plus petit possible). Évidemment, l'algorithme ne sera intéressant numériquement que si l'inversion de la matrice $\mathbb{M}$ est aisée (e.g. $\mathbb{M}$ diagonale ou triangulaire). En effet, s'il faut résoudre une suite de systèmes linéaires de taille $n \times n$ pour résoudre le système linéaire initial (de même taille), alors il n'y a aucun avantage à utiliser une méthode itérative plutôt qu'une méthode directe.*
- *Un avantage des méthodes itératives est qu'elles permettent souvent de limiter les problèmes de stockage lors de la résolution de systèmes linéaires de grande taille. Parfois, il est même inutile de stocker explicitement les matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$.*