Sup'Galilée
MACS1

Année 2020/2021

Analyse numérique - TD9 & TD10
Interpolation polynomiale et intégration numérique

TM : Travail à la Maison

1 (TD 9) Interpolation de Lagrange

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}$. On considère l'ensemble de $n+1$ points de $\mathbb{R}^2$ $(x_i, f_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$. On suppose que les points x_i sont deux à deux distincts. On cherche à montrer qu'il existe un unique polynôme p_n, de degré inférieur ou égal à n, satisfaisant

$$p_n(x_i) = f_i \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{1}$$

1. **Unicité.** Montrer que s'il existe, le polynôme p_n est unique.
2. **Existence.** On introduit les *polynômes caractéristiques de Lagrange* définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i \in [\![0,n]\!]. \tag{2}$$

   (a) Montrer que $L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.

   (b) Montrer que $\{L_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{P}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n)

   (c) Construire un polynôme p_n (dans la base $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$) vérifiant (1).

3. **Erreur d'interpolation.** Soient deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. On suppose maintenant que les points x_i appartiennent à $[a,b]$ et que $f_i = f(x_i)$. On veut montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi_x \in I_x$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \pi_{n+1}(x), \tag{3}$$

où $\pi_{n+1}(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$, et où I_x est le plus petit intervalle contientenant x et l'ensemble des points $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$.

   (a) Montrer que (3) est vraie si $x = x_i$ pour un entier i dans $[\![0,n]\!]$.
   On suppose dans la suite que $x \in [a,b]$ avec $x \neq x_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!]$.

   (b) On introduit, la fonction

$$\phi_x(t) = f(t) - p_n(t) - \left(\frac{f(x) - p_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} \right) \pi_{n+1}(t), \qquad \forall t \in [a,b].$$

   Montrer que ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I_x et que ϕ_x admet au moins $n+2$ racines distinctes sur I_x.

   (c) Montrer, par applications successives du théorème de Rolle, la proposition suivante

   Proposition. *Soit $g \in \mathcal{C}^p([a,b])$. On suppose qu'il existe $(p+1)$ points distincts $(c_i)_{i \in [\![0,p]\!]}$ appartenant à $[a,b]$ tels que $g(c_i) = 0$. On définit*

$$c_{min} = \min_{i \in [\![0,p]\!]} c_i \quad \text{et} \quad c_{max} = \max_{i \in [\![0,p]\!]} c_i.$$

   Alors, il existe (au moins) un point $\xi \in]c_{min}, c_{max}[$ tel que

$$g^{(p)}(\xi) = 0.$$

   (d) Déduire des questions (b) et (c) qu'il existe (au moins) un point $\xi_x \in I_x$ tel que

$$\phi_x^{(n+1)}(\xi_x) = 0,$$

   puis en déduire (3).

Remarque 1. *En pratique, pour calculer le polynôme p_n, on utilise une forme alternative à celle trouvée à la question 2.(c), la formule de Newton (voir l'exercice 2), dont le coût de calcul est moins élevé.*

Exercice 2 (Formule de Newton) (TM)

Soient un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de points deux à deux distincts de $[a,b]$, et soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un suite de nombres réels. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle p_n le polynôme de $\mathbb{P}_n[X]$ n qui interpole les $n+1$ points du plan $(x_i, f_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_0(x) = 1$. On cherche à calculer p_n à partir de p_{n-1} (où $p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}[X]$ interpole les n points $(x_i, f_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$). Pour cela on écrit p_n sous la forme

$$p_n = p_{n-1} + q_n, \tag{4}$$

avec $q_n \in \mathbb{P}_n[X]$ à déterminer.

1. Montrer que nécessairement q_n est de la forme $q_n(x) = a_n \pi_n(x)$ avec $a_n \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $a_n = \dfrac{f_n - p_{n-1}(x_n)}{\pi_n(x_n)}$. Le coefficient a_n est appelé *n-ième différence divisée de Newton* et introduit la notation

$$f[x_0, \cdots, x_n] := a_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent (4) devient

$$p_n = p_{n-1} + f[x_0, \cdots, x_n]\pi_n. \tag{5}$$

En posant $f[x_0] := f_0$ et $\pi_0(x) := 1$, Montrer que (5) implique, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k]\, \pi_k(x). \tag{6}$$

Remarque 2. *3. En pratique, pour calculer les $f[x_0, \ldots, x_k]$, $k = 0, \ldots, n$, on peut montrer les formules suivantes :*

$$f[x_0] = f_0, \tag{7}$$

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

On peut montrer également que les différences divisées sont invariantes par permutation des indices des nœuds.

Exercice 3 (application) (TM)

Considérons une fonction f dont le graphe passe par les points $A = (1,2)$, $B = (2,6)$, et $C = (3,12)$.

1. Déterminer, de trois façons différentes, le polynôme de Lagrange p_1 coïncidant avec f aux points A et B.
2. En utilisant p_1, déterminer le polynôme d'interpolation p_2 coïncidant avec f aux points A, B et C.
3. Pour $x = 2.5$, donner une approximation de la valeur $f(x)$ à l'aide du polynôme p_1 puis du polynôme p_2. Préciser les erreurs d'interpolation $E_1(x) = f(x) - p_1(x)$ et $E_2(x) = f(x) - p_2(x)$ en fonction de f. Que peut-on en conclure ?

Remarque 3. *Un algorithme de calcul utilisant les polynômes de Lagrange est fourni dans le polycopié du cours (algorithme 4.1 page 121). En Matlab/Octave, la fonction `polyfit.m` fournit les coefficient du polynôme d'interpolation de Lagrange p_n (lorsque le nombre de nœuds est égal au nombre de valeurs à interpoler), et la fonction `polyval.m` permet de calculer p_n en des points x de $\mathbb{R}$, afin de le réprésenter graphiquement (un exemple est donné dans l'exercice 3).*

Exercice 4 (application numérique)

Le tableau ci-dessous indique les variations de la moyenne annuelle de température sur le Terre, à différentes latitudes.

Latitude	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5	15	25	35	45	55	65
Température	-3.25	-3.37	-3.35	-3.2	-3.12	-3.02	-3.02	-3.07	-3.17	-3.32	-3.3	-3.22	-3.1

Afin de voir comment se comporte l'interpolation de Lagrange selon n, on cherche à représenter graphiquement :

— le polynôme de Lagrange p_3 passant par les points $(-55, -3.25)$, $(-15, -3.12)$, $(25, -3.17)$, $(65, -3.1)$,

— le polynôme de Lagrange p_4 passant par les points $(-55, -3.25)$, $(-25, -3.2)$, $(5, -3.02)$, $(35, -3.32)$, $(65, -3.1)$,

— et le polynôme de Lagrange p_{12} passant par les 13 points du tableau ci-dessus.

Sur la Figure 1 on représente le cas $n = 3$ en haut à gauche, le cas $n = 4$ en haut à droite, et le cas $n = 12$ en bas à gauche. Pour chaque figure : les ronds oranges représentent les 13 valeurs du tableau, les étoiles rouges représentent les valeurs interpolées, et la courbe bleue représente le polynôme d'interpolation.
Commenter ces figures. L'interpolation de Lagrange fournit-elle une approximation de plus en plus précise au fur et mesure que l'on augmente le nombre de nœuds d'interpolation ?

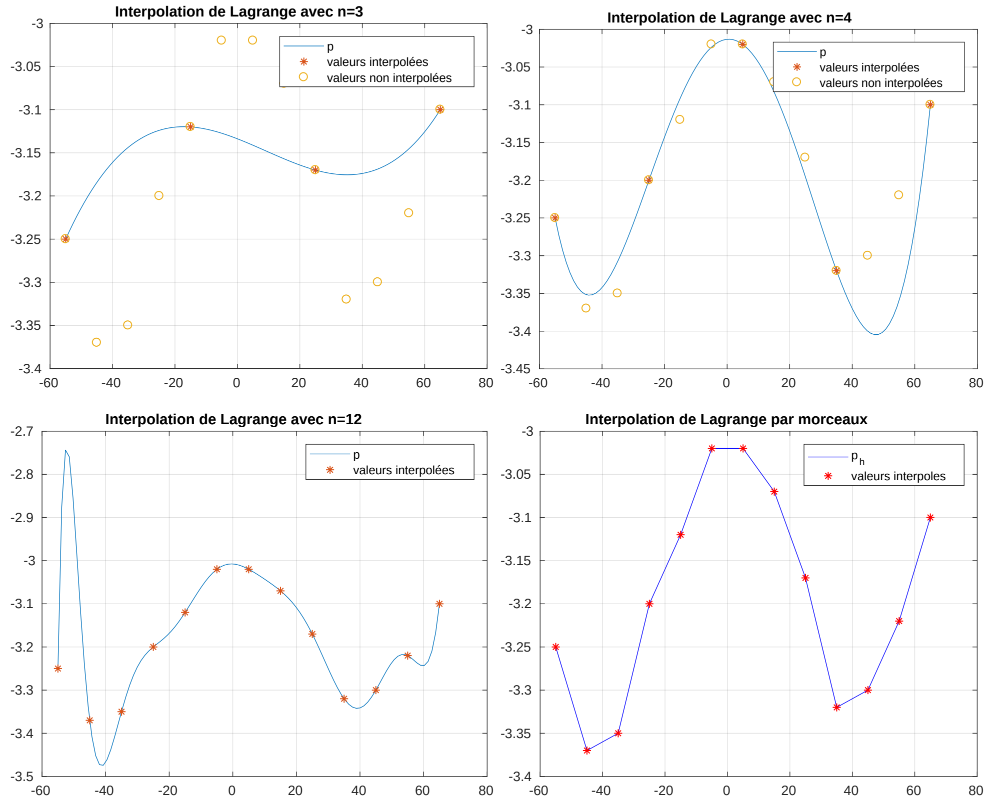

FIGURE 1 – Interpolation de Lagrange pour $n = 3$, $n = 4$, $n = 12$, et interpolation $\mathbb{P}_1$ par morceaux

2 (TD 9) Interpolation de Lagrange par morceaux

Exercice 5

On introduit une partition $\mathcal{T}_h$ de $[a, b]$ en n sous-intervalles $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i \in [\![0, n-1]\!]$, de longueur $h = \frac{b-a}{n}$, avec $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On note $f_i = f(x_i)$, $i \in [\![0, n]\!]$.

Definition 2.1. *Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, soit $p_{1,i}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}). Le polynôme d'interpolation par morceaux p_1^h est défini par : pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,*

$$p_1^h(x) = p_{1,i}(x), \ \forall x \in I_i.$$

1. Donner l'expression de p_1^h sur chaque intervalle I_i, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.
2. Une représentation graphique de p_h pour l'exemple de l'exercice 4 est donnée sur la Figure 1 (bas droite). Qu'observez-vous ?
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. Montrer que l'on a l'erreur d'interpolation suivante

$$|f(x) - p_1^h(x)| \leqslant \frac{h^2}{8} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \tag{9}$$

   Qu'en déduisez-vous ? L'interpolation de Lagrange $\mathbb{P}_1$ par morceaux fournit-elle une approximation de plus en plus précise au fur et mesure que l'on augmente le nombre de nœuds d'interpolation ?

Exercice 6 (Interpolation d'Hermite) (TM)

On considère $n + 1$ points $x_i \in \mathbb{R}$, deux à deux distincts et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On cherche un polynôme H_n tel que

$$H_n(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad H_n'(x_i) = f_n'(x_i), \qquad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{10}$$

1. Quel est a priori le degré de H_n ?
2. **Unicité.** Montrer que s'il existe un polynôme $H_n \in \mathbb{P}_{2n+1}[X]$ vérifiant (10), alors ce polynôme est unique.

3. **Existence.** On introduit les polynômes définis par, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$A_i(x) = L_i(x)^2(1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)), \quad (11)$$
$$B_i(x) = L_i(x)^2(x - x_i). \quad (12)$$

Vérifier que pour tout $i, j \in [\![0, n]\!]$:

$$A_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad A_i'(x_j) = 0, \quad B_i(x_j) = 0, \quad B_i'(x_j) = \delta_{ij}. \quad (13)$$

En déduire que le polynôme H_n défini par $H_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \big(f(x_i)A_i(x) + f'(x_i)B_i(x)\big)$ est dans $\mathbb{P}_{2n+1}[X]$ et vérifie (10).

3 (TD 10) Intégration numérique

Exercice 7 (méthodes composites)

Soit f une fonction définie et intégrable sur un intervalle $[a, b]$ donné. On propose de chercher une approximation de

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

par la formule de Simpson composite. Pour cela, on subdivise $[a, b]$ en m sous-intervalles $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, avec $\alpha_i = a + ih$ où $h = \frac{b-a}{m}$ et $i \in [\![0, m]\!]$.
On note $x_j = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} = a + (2i+1)\frac{h}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, $i \in [\![0, m-1]\!]$.

1. Rappeler la formule de Simpson élémentaire sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, $i \in [\![0, m-1]\!]$, puis la formule de Simpson composite (basée sur la subdivision ci-dessus).
2. *(algo)* Écrire l'algorithme (fonction SimpsonComposite) permettant de calculer une valeur approchée de I par formule de Simpson composite.
3. *(algo)* Écrire l'algorithme (fonction SimpsonCompositeOpt) permettant de calculer une valeur approchée de I par formule de Simpson composite, en minimisant le nombre d'appel à la fonction f.

Exercice 8 (Calcul approché de $\ln 2$)

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$.
2. On pose $J = \frac{1}{6}(1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2})$. Expliquer pourquoi J est une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-2} près.
3. Déterminer le nombre de subdivisions régulières de $[0, 1]$ pour obtenir une approximation de I à 10^{-10} près en utilisant les méthodes des trapèzes et de Simpson composites.

Exercice 9 (formule de Gauss)

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.
On considère la formule de quadrature suivante $I(f) \approx J(f)$ avec

$$J(f) = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1). \quad (14)$$

On souhaite choisir les nœuds x_0 et x_1 et les poids ω_0 et ω_1 (soit 4 variables) de sorte que le degré d'exactitude de la formule de quadrature $J(f)$ soit le plus élevé possible. Pour résoudre ce problème, on a besoin de 4 équations (pour avoir une solution unique pour les nœuds et les poids). Ainsi on va chercher les nœuds et les poids de sorte que le degré d'exactitude vaut 4. Cela nous donne les 4 équations suivantes :

$$I(f) = J(f), \qquad \text{pour} \quad f(x) = x^\ell, \ \forall \ell \in [\![0, 3]\!].$$

1. Établir le système de 4 équations (non linéaires) pour obtenir les nœuds et les poids.
2. Des valeurs simples (non nulles) pour ω_0 et ω_1 permettant de vérifier la première équation de ce système sont $\omega_0 = 1$ et $\omega_1 = 1$. En déduire que $x_0 = -x_1$ et que x_0 et x_1 sont non nuls. On fixe $x_0 < 0$. Montrer que $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Vérifier que ces valeurs des nœuds et des poids sont solution du système de la question 1).
3. Vérifier que la formule de quadrature obtenue à la question précédente

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

est de degré d'exactitude 3.