Sup'Galilée
MACS1

Année 2021/2022

Analyse numérique - TD1
Algorithmique

Exercice 1

1. Ecrire la fonction SP permettant de calculer : $y = \sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1}^{n} b_j \sin\left(\frac{2j\pi}{n} x^i\right)$.
2. On veut calculer
$$I = \prod_{k=0}^{n}\left[\alpha_k \sum_{i=0}^{p} \cos\left(\frac{2\pi}{k+i+1} z\right) + \beta_k \sum_{i=0}^{q} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{q} \frac{z-x_j}{x_i-x_j}\right].$$
   (a) Quelles sont les données minimales permettant de calculer I ?
   (b) Ecrire en langage algorithmique la fonction CalculI permettant de calculer I.

Exercice 2

Ecrire une fonction DisReg générant une discrétisation régulière d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$) en $n+1$ points.

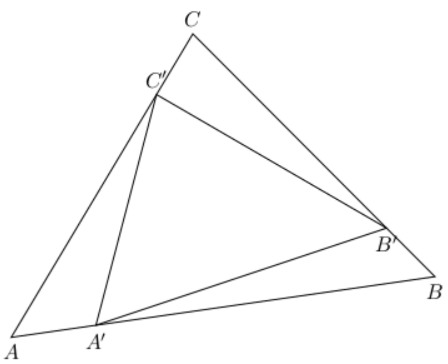
Exercice 3

On considère un système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ donnés. L'unique solution de ce système est $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Notons $\mathcal{L}_i$ la i-ème ligne de ce système. On rappelle que si l'on remplace $\mathcal{L}_i$ par une combinaison linéaire de $\mathcal{L}_i$ et d'une autre ligne $\mathcal{L}_k$:
$$\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i + \alpha\mathcal{L}_k, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R},$$
alors on obtient un système linéaire équivalent $\tilde{\mathbb{A}}\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$, dont l'unique solution est encore $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.
Écrire une fonction CombLigneSys qui remplace la i-ème ligne d'une matrice de $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'un vecteur de $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ par une combinaison linéaire de la i-ème ligne et de la k-ième ligne.

Exercice 4

On considère un système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ donnés. Si l'on permute la k-ème ligne $\mathcal{L}_k$ avec la ℓ-ème ligne $\mathcal{L}_\ell$, on retrouve le même système linéaire.
Écrire une fonction PermLignesSys qui permute deux lignes k et ℓ d'une matrice $\mathbb{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$, avec $k, \ell \in [\![1, n]\!]$, $k \neq \ell$.

Exercice 5



Soit T un triangle de sommets A, B et C. À partir de ce triangle on peut construire un nouveau triangle de sommets A', B' et C' vérifiant
$$\overrightarrow{AA'} = x\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BB'} = x\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{CC'} = x\overrightarrow{CA}$$
avec x un réel strictement compris entre 0 et 1.

Écrire une fonction triangles permettant à partir des trois sommets A, B, C d'un triangle initial quelconque non réduit à une droite ou un point, de représenter ce triangle ainsi que les n triangles obtenus par le processus de construction décrit ci-dessus avec un x donné dans $]0, 1[$. On dispose pour celà de la fonction plot$([x_A, x_B], [y_A, y_B])$ permettant de tracer le segment $[A, B]$ du plan avec $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$.