Sup'Galilée
MACS1

Année 2021/2022

Analyse numérique - TD2 & TD3
Algèbre linéaire

TM : Travail à la Maison

1 (TD2) Matrices

Exercice 1 (Matrices "blocs")

On considère les matrices blocs

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix}$$

avec $\mathbb{O}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les matrices $\mathbb{AB}$ et $\mathbb{BA}$ en utilisant l'écriture bloc.
2. Calculer la matrice $(2\mathbb{B} - \mathbb{A})(\mathbb{B} + \mathbb{A})$ en fonction des matrices $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{I}$.

Exercice 2 (Matrices "blocs") - (TM)

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{L}$ la matrice $\mathbb{L} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k - \mathbb{BA} & \mathbb{B} \\ \hline 2\mathbb{A} - \mathbb{ABA} & \mathbb{AB} - \mathbb{I}_n \end{array}\right)$.

1. Montrer que la matrice $\mathbb{L}$ est bien définie et spécifier les dimensions des blocs.
2. Calculer $\mathbb{L}^2$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3 (Résolution de systèmes triangulaires)

Soient $\mathbb{D}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversibles, respectivement diagonale, triangulaire inférieure et triangulaire supérieure. Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

1. (**TM** pour $\mathbb{D}$ et $\mathbb{U}$) Calculer $\det(\mathbb{D})$, $\det(\mathbb{L})$, et $\det(\mathbb{U})$.
2. (**TM**) *(algo)* Résoudre $\mathbb{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et écrire l'algorithme (fonction RSLDIAG) permettant de résoudre ce système. Calculer le coût (évaluer le nombre d'opérations élémentaires) de cet algorithme.
3. *(algo)* Résoudre $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et écrire l'algorithme (fonction ResTriInf) permettant de résoudre ce problème. Calculer le coût de cet algorithme.
4. (**TM**) *(algo)* Résoudre $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et écrire l'algorithme (fonction ResTriSup) permettant de résoudre ce problème. Calculer le coût de cet algorithme.

Exercice 4 (Produit et inverse de matrices triangulaires)

Soient $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}^{(1)}$ et $\mathbb{L}^{(2)}$ des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Que peut-on dire des matrices $\mathbb{L}^*$ et $(\mathbb{L}^*)^*$?
2. $\mathbb{C} = \mathbb{L}^{(1)}\mathbb{L}^{(2)}$ est triangulaire inférieure, et que $c_{i,i} = \ell^{(1)}_{i,i}\ell^{(2)}_{i,i}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
3. Déterminer les valeurs propres de $\mathbb{L}$.
4. A quelle(s) conditions la matrice $\mathbb{L}$ est-elle inversible ?
5. On suppose que $\mathbb{L}$ est inversible et on note $\mathbb{M} = \mathbb{L}^{-1}$. Montrer que $\mathbb{M}$ est triangulaire inférieure avec

$$m_{i,i} = \frac{1}{\ell_{i,i}}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!].$$

6. (**TM**) Que peut-on dire si les éléments diagonaux de $\mathbb{L}$ sont tous distincts ?

7. (**TM**) Soient $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}^{(1)}$ et $\mathbb{U}^{(2)}$ des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Que peut-on dire de $\mathbb{U}^{(1)}\mathbb{U}^{(2)}$, $\mathbb{U}^{-1}$, $\mathbb{L}\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}\mathbb{L}$?
8. (**TM**) Soit $\mathbb{D}$ la matrice définie par
$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
La matrice $\mathbb{D}$ est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse. Pour chacune des valeurs propres, déterminer l'espace propre associé. La matrice $\mathbb{D}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

Exercice 5 (Matrices hermitiennes définies positives)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne.

1. Montrer que $(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ et en déduire que les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont réelles.
2. Montrer que $\mathbb{A}$ est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.
3. En déduire que $\mathbb{A}$ est inversible.

Exercice 6 (Matrices à diagonale strictement dominante) (TM)

Soit $\mathbb{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale strictement dominante :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{j \in [\![1,n]\!], j \neq i} |a_{i,j}|$$

1. Montrer que $\mathbb{A}$ est inversible.
2. Montrer que toutes les sous matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles.

2 (TD3) Normes vectorielles, matricielles et suites de vecteurs

Exercice 7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) (TM)

1. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \qquad |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2. \tag{1}$$
(Indication : calculer $\alpha \in \mathbb{R}$ en fonction de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ tel que $(\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$, puis, calculer $\|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2$).
2. Montrer que l'on a l'égalité dans (1) si et seulement si $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 (Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle)

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On définit l'application $\|\cdot\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ par
$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

1. Montrer que
$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\| = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|.$$
2. Montrer que $\|\cdot\|_s$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et montrer qu'elle vérifie les propriétés suivantes :
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\| \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n,$$
$$\|\mathbb{I}\|_s = 1.$$

Exercice 9 (Rayon spectral)

1. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\|\cdot\|_s$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|_v$. Montrer que
$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|_s.$$
2. On note maintenant $\|\cdot\|$ une norme matricielle **quelconque**. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$ et soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ un vecteur propre associé à λ.

(a) Montrer que la matrice $\mathbb{B} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est non nulle.

(b) Montrer que
$$\mathbb{A}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* = \lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

(c) En déduire que
$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|.$$

3. Quel résultat avez vous démontré ?

Exercice 10 (Suite de vecteurs et de matrices)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{A}^k = \mathbb{O}$ alors $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{A}^k\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$.
2. Montrer que si $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{A}^k\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ alors
$$\rho(\mathbb{A}) < 1.$$
3. Montrer que si $\rho(\mathbb{A}) < 1$, alors il existe au moins une norme matricielle subordonnée (notée $\|\cdot\|_s$) telle que
$$\|\mathbb{A}\|_s < 1.$$
4. Supposons qu'il existe une norme matricielle subordonnée (notée $\|\cdot\|_s$) telle que
$$\|\mathbb{A}\|_s < 1.$$
Montrer que $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{A}^k = \mathbb{O}$.
5. Conclure.

Exercice 11 (Convergence d'une méthode itérative)

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible, et deux matrices $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$. Soient $\boldsymbol{u}^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On considère l'algorithme
$$\mathbb{M}\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \mathbb{N}\boldsymbol{u}^{(k)} + \boldsymbol{b}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

1. A quelle condition l'algorithme (2) est-il bien défini ?

On pose $\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}$.

2. Montrer que si la suite $(\boldsymbol{u}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle converge vers la solution $\boldsymbol{u}$ du système $\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$.
3. Montrer que la suite $(\boldsymbol{u}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour toute donnée initiale $\boldsymbol{u}^{(0)}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Exercice 12 (Série de Neumann) (TM)

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle.

1. Montrer que si $\rho(\mathbb{A}) < 1$, la matrice $\mathbb{I}_n - \mathbb{A}$ (où $\mathbb{I}_n$ est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) est inversible.
2. On définit la matrice $\mathbb{M}_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par
$$\mathbb{M}_k = \mathbb{I}_n + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \cdots + \mathbb{A}^k = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{A}^j.$$
Montrer que si $\rho(\mathbb{A}) < 1$, alors
$$\mathbb{M}_k = (\mathbb{I}_n - \mathbb{A})^{-1}(\mathbb{I}_n - \mathbb{A}^{k+1}).$$
3. En déduire que la série de terme général $\mathbb{A}^k$ converge vers $(\mathbb{I}_n - \mathbb{A})^{-1}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{A}) < 1$.