Sup'Galilée
MACS1

Année 2021/2022

Analyse numérique - TD4 & TD5
Résolution numérique des équations non linéaires

TM : Travail à la Maison

1 Méthode de dichotomie pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 1 - (TM)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)\, f(b) < 0$. On définit par récurrence les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suivantes :

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k, & \text{si } f(a_k)\, f(x_k) < 0, \\ x_k & \text{sinon,} \end{cases} \qquad b_{k+1} = \begin{cases} x_k, & \text{si } f(a_k)\, f(x_k) < 0, \\ b_k & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}. \tag{1}$$

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in [a, b]$ tel que $f(\gamma) = 0$. γ est-il unique ? que se passe-t-il si f n'est pas continue ?
2. Montrer que l'algorithme (1) est bien défini, que $\gamma \in [a_k, b_k]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et que
$$b_k - a_k = \frac{(b-a)}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
3. Montrer que les deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (Indication : on montrera que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et on déduira de la question 2 que $\lim\limits_{k\to+\infty} (b_k - a_k) = 0$).
4. En déduire que les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ont même limite α.
5. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(a_k) f(b_k) \leqslant 0$. En déduire que $f(\alpha) = 0$. Comparer α et γ.
6. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$
7. Soit $\varepsilon > 0$ donné.
   (a) Déterminer k pour avoir $|x_k - \alpha| \leqslant \varepsilon$.
   (b) Combien faut-il d'itérations supplémentaires pour avoir une majoration en $\dfrac{\varepsilon}{10}$?

2 Méthode du point fixe pour la résolution de l'équation $f(x) = x$.

Exercice 2 (dimension 1)

Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \;\forall k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

1. Montrer que la suite (2) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).
2. Montrer que si la suite (2) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.
3. Existence du point fixe (Théorème du point fixe de Brouwer) : montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$.
4. On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que
$$\exists\, L \in [0, 1[, \text{tel que, } \forall (x, y) \in [a, b]^2,\; |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x - y|.$$
   a- Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$.
   b- Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α, pour toute donnée initiale x_0 dans $[a, b]$.
5. *(algo)* Écrire l'algorithme du point fixe (fonction PointFixe) permettant de résoudre l'équation $\phi(x) = x$.

Exercice 3 (Extension au cas d'un espace de Banach) - (TM)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (espace vectoriel normé complet, de norme notée $\|\cdot\|$). On considère une application $\phi : E \mapsto E$ contractante :

$$\exists\, L \in [0,1[, \text{tel que}, \forall (x,y) \in E^2,\ \|\phi(x) - \phi(y)\| \leqslant L\|x-y\|.$$

A partir de $x_0 \in E$ donné, on construit la suite récurrente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{k+1} = \phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

1. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Montrer que la fonction ϕ est continue. En déduire que si la suite x_k converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.

3. Montrer que si ϕ admet un point fixe alors ce point fixe est unique.

4. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En déduire que ϕ admet une unique point fixe qui est donné par la limite de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ quand k tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (Point fixe attractif)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(]\alpha_-, \alpha_+[)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.En déduire que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtenue à l'aide de l'algorithme du point fixe

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \phi(x_k), \tag{4}$$

est bien définie et converge.

2. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha).$$

En déduire que la méthode du point fixe est au moins d'ordre 1.

3. Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^{(p+1)}(\mathcal{V})$, que $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$, et $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}.$$

En déduire que la méthode du point fixe est d'ordre $p+1$ dans ce cas.

Exercice 5 (Application)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10$. On cherche à calculer de façon approchée la racine positive, notée α, de l'équation $f(x) = 0$ par une méthode de point fixe.

1. On pose $\phi_1(x) = x - f(x)$. Montrer que α est un point fixe de ϕ_1. On choisit $x_0 = 3$ et on pose $x_{k+1} = \phi_1(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Calculer les trois premiers itérés de cette suite et utiliser le graphe de la Figure 1 (à gauche) pour appliquer les 3 premières itérations de la méthode du point fixe avec ϕ_1, en partant de $x_0 = 3$. En déduire que cette suite ne converge pas.

Pour palier à ce problème, une idée est de "sous-relaxer" la méthode itérative en posant $\phi_\omega(x) = x - \omega f(x)$, avec $0 < \omega < 1$.

2. Montrer que α est un point fixe de ϕ_ω, pour tout $\omega \neq 0$.

On choisit dans la suite $\omega = \frac{1}{8}$. On choisit de nouveau $x_0 = 3$ et on pose $x_{k+1} = \phi_{\frac{1}{8}}(x_k)$, pour $n \geqslant 0$.

3. Utiliser le graphe de la Figure 1 (à droite) pour appliquer les 3 premières itérations de la méthode du point fixe avec $\phi_{\frac{1}{8}}$, en partant de $x_0 = 3$.

4. Montrer, en utilisant le théorème du cours (de convergence globlabe), que $\phi_{\frac{1}{8}}$ a un unique point fixe α dans $[3,4]$ et que l'algorithme du point fixe converge vers α, pour tout x_0 dans $[3,4]$.

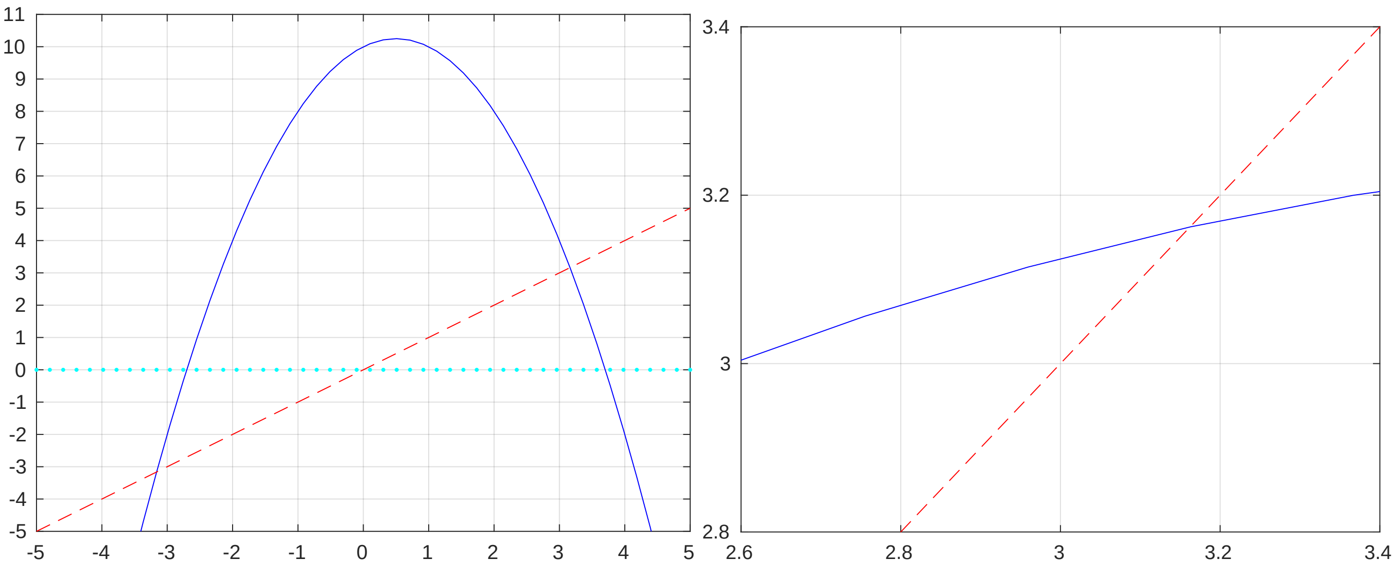

FIGURE 1 – Gauche : la fonction ϕ_1 (en trait plein). Droite : la fonction $\phi_{\frac{1}{8}}$ (en trait plein). Pour chaque figure la courbe rouge en pointillés est la droite $y = x$

5. Le point fixe α est-il attractif ? répulsif ? Pour x_0 suffisamment proche de α, la convergence est-elle linéaire ? quadratique ? (justifier votre réponse à l'aide des théorèmes du cours de convergence locale).
6. On va montrer, par une autre preuve, les résultats des questions 4 et 5, sans utiliser le théorème général du cours. Cela permettra aussi d'estimer précisément la vitesse de convergence de la méthode du point fixe appliquée à $\phi_{\frac{1}{8}}$.
   (a) Montrer que
   $$(x_{k+1} - \alpha) = (x_k - \alpha)\left[1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha)\right].$$
   (b) En utilisant (a) et que $\phi_{\frac{1}{8}}([3,4]) \subset [3,4]$ (vu à la question 4), montrer que pour $n \geqslant 0$:
   $$|x_{k+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{5-\alpha}{8}\right)|x_k - \alpha|.$$
   (c) En déduire que pour $n \geqslant 0$:
   $$|x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{5-\alpha}{8}\right)^k |x_0 - \alpha|.$$
   (d) En déduire que la suite $(x_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers α, et que la convergence est linéaire.
   (e) Montrer que pour $k \geqslant 0$: $|x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$, puis estimer le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une valeur de α précise à 10^{-3} près.

Exercice 6 (Application) - (TM)

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \cos(x)$. On cherche à calculer une approximation de la solution de l'équation $f(x) = x$.

1. Montrer que cette équation possède une solution unique dans $[0,1]$, que l'on notera x^*.
2. Pour approcher x^*, on définit une suite $\left(x^{(n)}\right)$, pour $n \geqslant 0$ par $x^{(0)} = 1$ et $x^{(n+1)} = f\left(x^{(n)}\right)$.
   (a) Utiliser le graphe de la Figure 2 pour appliquer les 4 premières itérations de cette méthode, en partant de $x^{(0)} = 0.5$.
   (b) Montrer que
   $$\left(x^{(n+1)} - x^*\right) = -2\sin\left(\frac{x^{(n)} + x^*}{2}\right)\sin\left(\frac{x^{(n)} - x^*}{2}\right)$$
   (c) En déduire la convergence de la suite vers x^*, asymptotiquement comme une suite géométrique de raison $-\sin(x^*)$.
   (d) Est-ce que cela correspond au résultat vu en cours ?

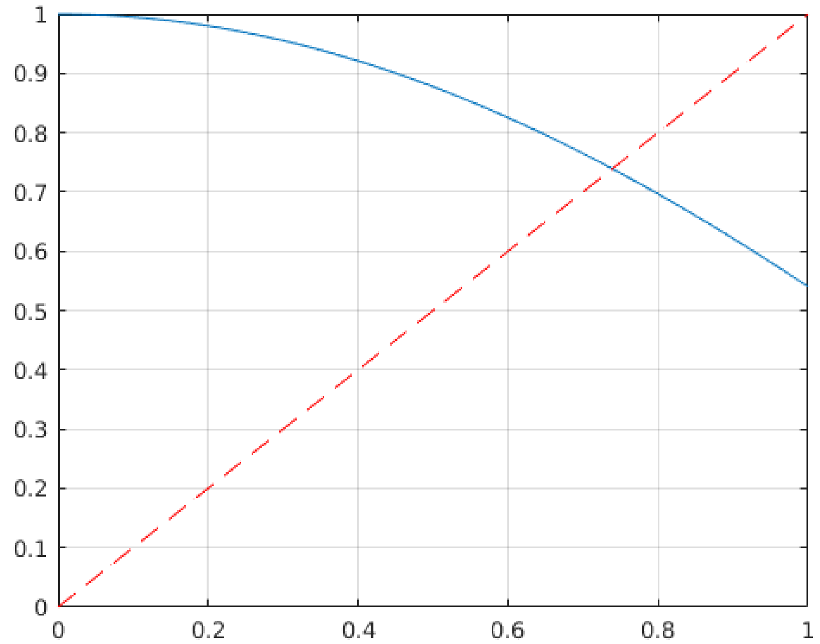

FIGURE 2 – la fonction f (en trait plein), et la droite $y = x$ (en rouge pointillés)

3 Méthodes de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 7

Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée continue sur $\mathbb{R}$) qui admet une racine $\bar{x} \in \mathbb{R}$. La méthode de Newton est une méthode iterative d'approximation de $\bar{x}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $k \geqslant 0$, on définit x_{k+1} par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{5}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que sous certaines conditions, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$.

1. Sous quelle condition la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?

2. Interpréter graphiquement l'algorithme (5).

3. Montrer que l'algorithme de Newton est un algorithme du point fixe appliqué à une fonction g que l'on déterminera.

4. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et que $f'(\bar{x}) \neq 0$. En déduire une condition suffisante de convergence de l'algorithme de Newton.

5. On suppose que $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ avec $f'(\bar{x}) \neq 0$, et $f''(\bar{x}) \neq 0$. Montrer que la méthode de Newton, lorsqu'elle converge est d'ordre 2 (on dit alors que l'erreur de convergence est quadratique).

Exercice 8 (Application)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

1. Quelles sont les racines de l'équation $f(x) = 0$?

Nous allons illustrer les résultats vus en cours sur la convergence de la méthode de Newton appliquée à la résolution de cette équation.

2. Calculer $f'(x)$ et écrire la relation de récurrence liant deux itérés successifs de la méthode de Newton sous la forme $x^{(k+1)} = F\left(x^{(k)}\right)$ avec une fonction F que l'on précisera.
3. Utiliser le graphe de la Figure 3 pour appliquer les 3 premières itérations de la méthode de Newton avec f, en partant de $x^{(0)} = -2$.
4. Selon les résultats vus dans l'exercice 5, qu'attend on comme convergence de la suite de Newton autour des racines calculées à la question 1) ?

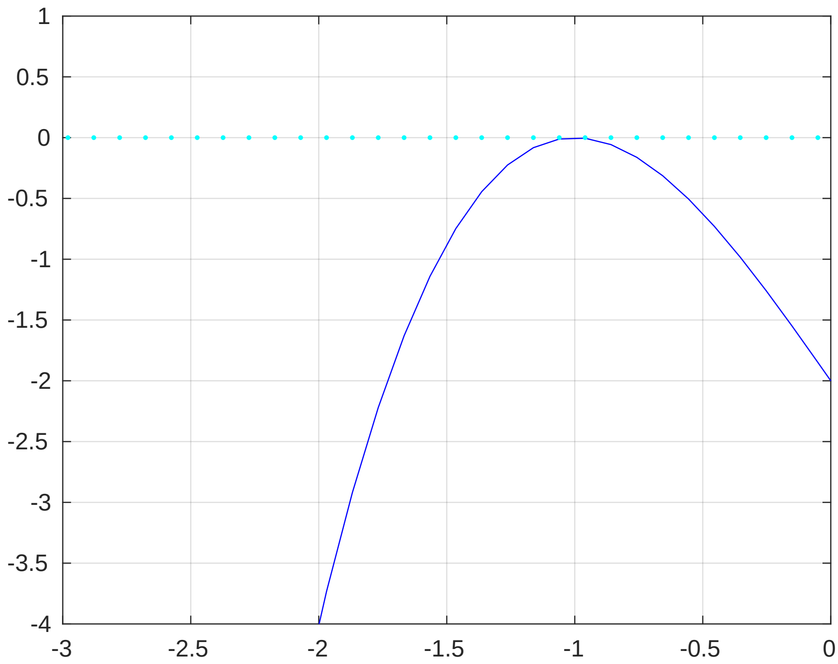

FIGURE 3 – La fonction f (en trait plein)

Exercice 9 (Application : calcul approché de $\sqrt{a}$)

1. Ecrire l'algorithme de Newton pour la résolution de $x^2 - a = 0$, où a est un réel strictement positif.
2. Lorsque $a = 2$ et que l'itéré initial est $x^{(0)} = 2$, calculer les trois premiers itérés de cette suite sous forme fractionnaire et sous forme décimale approchée ; comparez avec $\sqrt{2}$ dont une valeur approchée à 10^{-10} près est $1,4142135624$. Comparez avec la précision donnée par l'algorithme de dichotomie (voir Exercice 1).
3. Montrer que $(x^{(n+1)} - \sqrt{a}) = \frac{1}{2x^{(n)}}(x^{(n)} - \sqrt{a})^2$. En déduire que si $x^{(0)} \geqslant 0$, alors $x^{(n)} \geqslant \sqrt{a}$ pour tout $n \geqslant 1$ puis montrer que la suite est décroissante à partir de $n = 2$.
4. En déduire que la suite converge quadratiquement vers $\sqrt{a}$. Est ce le résultat attendu en appliquant le théorème vu en cours ?

Exercice 10 (Vrai ou faux ?) - (TM)

1. Pour obtenir un encadrement à 10^{-3} près de la solution de $x^2 - 2 = 0$ par la méthode de dichotomie en partant de l'intervalle $[1, 2]$, il suffit de 10 itérations.
2. La méthode de dichotomie fournit une approximation de plus en plus précise de la solution d'une équation non-linéaire.
3. La méthode de dichotomie permet de trouver les zéros de n'importe quelle fonction.
4. Les itérés de la méthode de Newton appliquée à la fonction $x \mapsto x^2$ convergent quadratiquement vers 0.
5. A condition que l'itéré initial soit suffisamment proche de $\sqrt{3}$, la suite définie par $x^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(n)} + \frac{3}{x^{(n)}}\right)$ converge quadratiquement vers $\sqrt{3}$.
6. La suite définie par $x^{(0)} = 0$ et $x^{(n+1)} = \frac{\exp(x^{(n)})}{3}$ converge vers la solution de l'équation $\exp(x) = 3x$ située dans $[0, 1]$. En revanche, cette méthode itérative ne permet pas de s'approcher de la solution de cette équation située dans $[\frac{3}{2}, 2]$.