Sup'Galilée
MACS1

Année 2021/2022

Analyse numérique - TD4 & TD5 - Corrigé des exercices 2-4-5-7-8-9
Résolution numérique des équations non linéaires

Méthode du point fixe pour la résolution de l'équation $f(x) = x$.

Exercice 2 (dimension 1)

Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{k+1} = \phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

1. Montrer que la suite (1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).
2. Montrer que si la suite (1) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.
3. Existence du point fixe (Théorème du point fixe de Brouwer) : montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$.
4. On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists\, L \in [0, 1[, \text{tel que}, \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x - y|.$$

   a- Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$.

   b- Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α, pour toute donnée initiale x_0 dans $[a, b]$.

5. *(algo)* Écrire l'algorithme du point fixe (fonction PointFixe) permettant de résoudre l'équation $\phi(x) = x$.

Correction

1. La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, connaissant x_0.

Dans le cas présent, il faut s'assurer que $x_k \in [a, b]$ pour tout entier k car la fonction ϕ n'est par hypothèse définie que sur $[a, b]$. En effet, si x_k n'appartient pas à l'intervalle $[a, b]$, alors on ne peut pas définir x_{k+1} puisque $\phi(x_k)$ n'existe pas.

Nous montrons ce résultat pas récurrence :

- Initialisation pour $k = 0$. Par hypothèse, $x_0 \in [a, b]$.
- Hérédité : nous supposons que $x_k \in [a, b]$ et nous allons montrer que $x_{k+1} \in [a, b]$. Par définition, $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Puisque par hypothèse, $\phi([a, b]) \subset [a, b]$, on en déduit immédiatement que $x_{k+1} \in [a, b]$.

Remarque. *hypothèse importante :* $\phi([a, b]) \subset [a, b]$.

2. Supposons que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $\bar{x}$. $\bar{x} \in [a, b]$ car $[a, b]$ est un intervalle fermé. Par ailleurs, en utilisant la continuité de ϕ, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Par les théorème de comparaison des limites et la relation (1), on a :

$$\bar{x} = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} \overbrace{=}^{(1)} \lim_{k\to+\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Ainsi $\bar{x} = \phi(\bar{x})$ et donc $\bar{x}$ est un point fixe de ϕ.

Remarque. *hypothèses importantes :* $[a, b]$ *est fermé et* ϕ *est continue sur* $[a, b]$.

3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \phi(x) - x$. Comme $\phi([a, b]) \subset [a, b]$,

$$g(a) = \phi(a) - a \geqslant a - a \geqslant 0.$$

De manière similaire,
$$g(b) = \phi(b) - b \leqslant b - b \leqslant 0.$$
Puisque ϕ est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires (ou Bolzano) (sur $[a, b]$, ϕ prend toutes les valeurs entre $\phi(a)$et $\phi(b)$) garantit l'existence d'un nombre $\alpha \in [a, b]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Or
$$0 = g(\alpha) = \phi(\alpha) - \alpha,$$
donc α est un point fixe de ϕ.

Remarque. *L'hypothèse de continuité de ϕ est cruciale. Le résultat est faux si ϕ n'est pas continue.*
On peut par exemple considérer la fonction $\phi_0 : [-1, 1] \to [-1, 1]$ telle que $\phi_0(x) = \frac{1}{2}$ si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, et $\phi_0(x) = -\frac{1}{2}$ si $0 < x \leqslant 1$, qui n'admet pas de point fixe sur $[-1, 1]$.

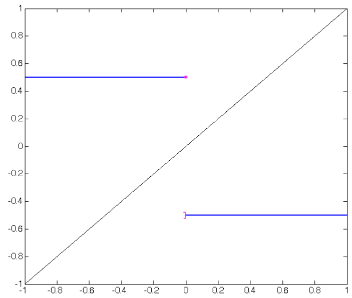

FIGURE 1 – Graphe représentatif de la fonction ϕ_0 et de la droite $y = x$

On pourra aussi remarquer qu'il n'y a pas forcément unicité du point fixe. En effet, la fonction ϕ définie par $\phi(x) = x, \ \forall x \in [a, b]$ est continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ et admet une infinité de points fixes.

4.

a- Nous utilisons une démarche classique pour montrer l'unicité. Nous supposons que la fonction ϕ admet deux points fixes α_1 et α_2 ($\alpha_1 = \phi(\alpha_1)$ et $\alpha_2 = \phi(\alpha_2)$) et nous allons montrer que $\alpha_1 = \alpha_2$. En utilisant le fait que ϕ est contractante, on a
$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leqslant L|\alpha_1 - \alpha_2|.$$
ce qui peut être réécrit comme
$$(1 - L)|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant 0. \tag{2}$$
Comme $(1 - L) > 0$, l'inégalité (2) implique $|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant 0$ et donc $\alpha_1 = \alpha_2$. La fonction ϕ a donc au plus un point fixe.

b- D'après les questions 3 et 4, on sait que la fonction ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| \leqslant L|x_k - \alpha|,$$
si bien que, par récurrence, on peut montrer que
$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
Comme $L < 1$, $\lim\limits_{k \to +\infty} L^k = 0$ et donc le terme de droite de l'inégalité précédente tend vers 0. Par le théorème de comparaison des limites,
$$\lim_{k \to +\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$

5. On écrit ci-dessous l'algorithme du point fixe, en supposant que l'on recherche un point fixe non nul.

Algorithm 1 Fonction PointFixe : résout $\phi(x) = x$ par la méthode du point fixe $x_k = \phi(x_{k-1}), \ \forall k \in \mathbb{N}^*$

Données : ϕ : fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue
x_0 : nombre réel, (donnée initiale)
tol : nombre réel strictement positif (tolérance)
$k_{\max}$: nombre entier supérieur ou égal à 1 (nombre maximal d'itérations)

Résultat : x : un réel tel que $\frac{|\phi(x) - x|}{|x| + 1} \leqslant tol$ (si ce critère est verifié pour $k \in [\![0, k_{\max}]\!]$, et $x = x_{k_{\max}}$ sinon)

1: **Fonction** $x \leftarrow$ PointFixe$(\phi, x_0, tol, k_{\max})$

$k \leftarrow 1$
$x \leftarrow \phi(x_0)$
$r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$ ▷ résidu à l'itération 1
Tantque $r > tol$ et $k \leqslant k_{\max}$ **faire**
  $x_0 \leftarrow x$
  $x \leftarrow \phi(x_0)$
  $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$ ▷ résidu à l'itération k+1
  $k \leftarrow k+1$
fin Tantque
fin Fonction

Exercice 4 (Point fixe attractif)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(]\alpha_-, \alpha_+[)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.En déduire que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtenue à l'aide de l'algorithme du point fixe

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \phi(x_k), \tag{3}$$

est bien définie et converge.

2. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha).$$

En déduire que la méthode du point fixe est au moins d'ordre 1.

3. Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^{(p+1)}(\mathcal{V})$, que $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$, et $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}.$$

En déduire que la méthode du point fixe est d'ordre $p+1$ dans ce cas.

Correction

1. Puisque ϕ' est continue et que $|\phi'(\alpha)| < 1$, il existe $\delta > 0$ et un intervalle fermé $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset]\alpha_-, \alpha_+[$ tels que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $|\phi'(x)| < 1$.
On pose (la fonction ϕ' est continue sur $\mathcal{V}$ fermé borné)

$$L = \sup_{x\in\mathcal{V}} |\phi'(x)| = \max_{x\in\mathcal{V}} |\phi'(x)|.$$

Comme $\mathcal{V}$ est fermé, $L < 1$. Soient $(x, y) \in \mathcal{V}^2$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]x, y[\subset \mathcal{V}$ telle que

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(\xi)(x - y).$$

Puisque $|\phi'(\xi)| \leqslant L$, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x - y|,$$

ce qui signifie ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$. De plus, si $x \in \mathcal{V}$, en utilisant la formule précédente avec $y = \alpha \in \mathcal{V}$, on obtient

$$|\phi(x) - \alpha| \leqslant L|x - \alpha| < |x - \alpha| \leqslant \delta,$$

et donc $\phi(x) \in \mathcal{V}$. Ainsi on a $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$. D'après l'exercice 2 (ou le Théorème du cours), on sait que si $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtenue par l'algorithme du point fixe (3) est bien définie et converge vers α, à l'ordre 1 au moins.

2. Comme α est un point fixe de ϕ et $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

— soit $x_0 = \alpha$ et alors on a $x_k = \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

— soit $x_0 \neq \alpha$ et alors on a $x_k \neq \alpha,\ \forall k \in \mathbb{N}$, et

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \frac{\phi(x_k)-\phi(\alpha)}{x_k-\alpha}.$$

On reconnait alors le taux d'accroissement de la fonction ϕ entre x_k et α, qui tend vers $\phi'(\alpha)$ lorsque x_k tend vers α. Comme, d'après la question précédente, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers α, on a donc

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\phi(x_k)-\phi(\alpha)}{x_k-\alpha} = \phi'(\alpha),$$

ou encore (définition de la limite d'une suite)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N},\ k \geqslant K \Rightarrow \left|\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} - \phi'(\alpha)\right| < \varepsilon. \tag{4}$$

Remarque. *Soit f une fonction continue sur $\mathcal{V}$ admettant un point fixe $\alpha \in \mathcal{V}$, soit $x_0 \in \mathcal{V}$. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (3).*

- *On dit qu'une méthode de point fixe est d'ordre 1 s'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ et une constante $0 < C < 1$ tels que*

$$|x_{k+1}-\alpha| \leqslant C|x_k-\alpha| \quad \forall k \geqslant K.$$

- *Soit $p > 1$. On dit qu'une méthode de point fixe est d'ordre p s'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ une constante $C_p > 0$ telle que*

$$|x_{k+1}-\alpha| \leqslant C_p|x_k-\alpha|^p \quad \forall k \geqslant K.$$

En particulier, une méthode d'ordre 2 est dite quadratique.

Choisissons ε suffisamment petit pour que $C = \max(|\phi'(\alpha)-\varepsilon|, |\phi'(\alpha)+\varepsilon|) < 1$ (ceci est bien entendu possible puisque $|\phi'(\alpha)| < 1$). D'après la formule (4), il existe un entier $K \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $k \geqslant K$,

$$\phi'(\alpha) - \varepsilon < \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} < \phi'(\alpha) + \varepsilon$$

Donc, pour tout $k \geqslant K$, on a

$$\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} \leqslant \max(|\phi'(\alpha)-\varepsilon|, |\phi'(\alpha)+\varepsilon|) = C,$$

avec $C < 1$. Ainsi, si $|\phi'(\alpha)| < 1$, la méthode du point fixe est (au moins) d'ordre 1.

3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, il existe $\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$ tel que

$$x_{k+1}-\alpha = \phi(x_k)-\phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(x_k-\alpha)^i}{i!} \underbrace{\phi^{(i)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x_k-\alpha)^{p+1}}{(p+1)!}\phi^{(p+1)}(\xi_k).$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$ tel que

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!}\phi^{(p+1)}(\xi_k). \tag{5}$$

Par ailleurs, comme $\phi'(\alpha) = 0$, alors (en particulier) $|\phi'(\alpha)| < 1$. D'après la question 1, cela signifie que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'agorithme du point fixe (3) converge vers α. Comme de plus, $\phi \in \mathcal{C}^{(p+1)}(\mathcal{V})$, $\phi^{(p+1)}$ est continue sur $\mathcal{V}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \phi^{(p+1)}(\xi_k) = \phi^{(p+1)}(\alpha)$. Finalement, en prenant la limite dans (5), on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!}\phi^{(p+1)}(\alpha),$$

ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N},\ k \geqslant K \Rightarrow \left|\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}} - \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Prenons $\varepsilon > 0$ (quelconque) et posons, comme dans la question précédente

$$C = \max\left(\left|\frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!} - \varepsilon\right|, \left|\frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!} + \varepsilon\right|\right).$$

Alors, en utilisant (6), on vérifie facilement qu'il existe un entier $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant K$,

$$\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^{p+1}} \leqslant C,$$

(avec $C \neq 0$ car $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$), ce qui signifie que la méthode du point fixe est d'ordre $p+1$.

Exercice 5 (Application)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10$. On cherche à calculer de façon approchée la racine positive, notée α, de l'équation $f(x) = 0$ par une méthode de point fixe.

1. On pose $\phi_1(x) = x - f(x)$. Montrer que α est un point fixe de ϕ_1. On choisit $x_0 = 3$ et on pose $x_{k+1} = \phi_1(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Calculer les trois premiers itérés de cette suite et utiliser le graphe de la Figure 2 (à gauche) pour appliquer les 3 premières itérations de la méthode du point fixe avec ϕ_1, en partant de $x_0 = 3$. En déduire que cette suite ne converge pas.

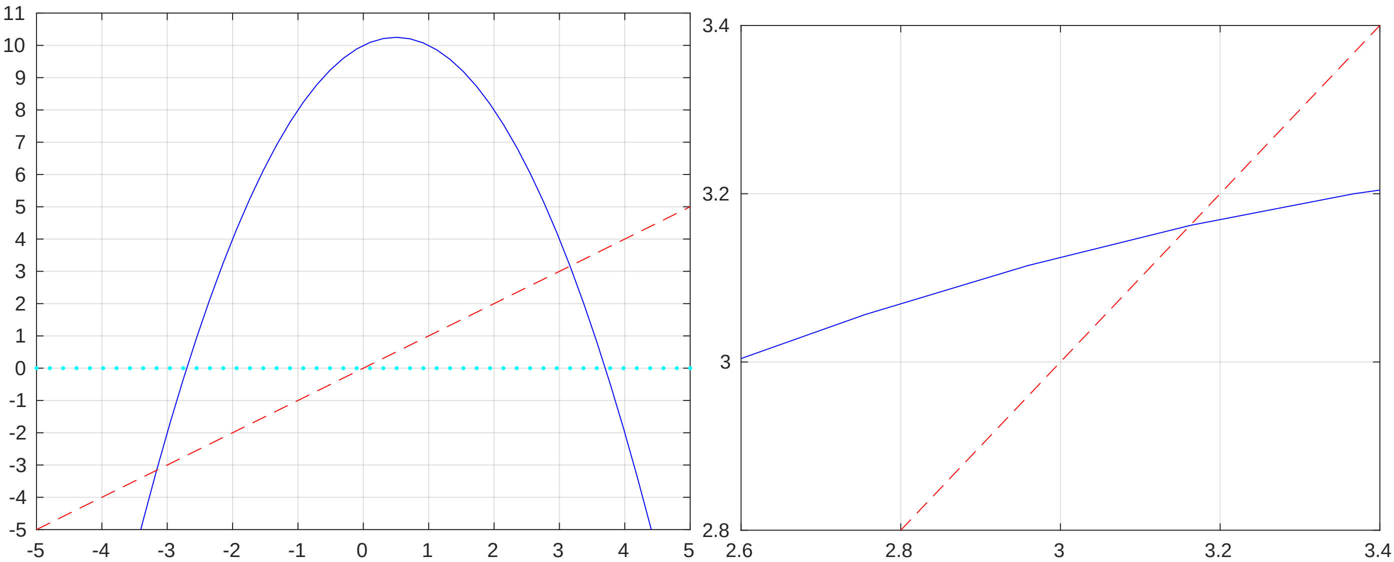

FIGURE 2 – Gauche : la fonction ϕ_1 (en trait plein). Droite : la fonction $\phi_{\frac{1}{8}}$ (en trait plein). Pour chaque figure la courbe rouge en pointillés est la droite $y = x$

Pour palier à ce problème, une idée est de "sous-relaxer" la méthode itérative en posant $\phi_\omega(x) = x - \omega f(x)$, avec $0 < \omega < 1$.

2. Montrer que α est un point fixe de ϕ_ω, pour tout $\omega \neq 0$.

On choisit dans la suite $\omega = \frac{1}{8}$. On choisit de nouveau $x_0 = 3$ et on pose $x_{k+1} = \phi_{\frac{1}{8}}(x_k)$, pour $n \geqslant 0$.

3. Utiliser le graphe de la Figure 2 (à droite) pour appliquer les 3 premières itérations de la méthode du point fixe avec $\phi_{\frac{1}{8}}$, en partant de $x_0 = 3$.
4. Montrer, en utilisant le théorème du cours (de convergence globlabe), que $\phi_{\frac{1}{8}}$ a un unique point fixe α dans $[3, 4]$ et que l'algorithme du point fixe converge vers α, pour tout x_0 dans $[3, 4]$.
5. Le point fixe α est-il attractif ? répulsif ? Pour x_0 suffisamment proche de α, la convergence est-elle linéaire ? quadratique ? (justifier votre réponse à l'aide des théorèmes du cours de convergence locale).
6. On va montrer, par une autre preuve, les résultats des questions 4 et 5, sans utiliser le théorème général du cours. Cela permettra aussi d'estimer précisément la vitesse de convergence de la méthode du point fixe appliquée à $\phi_{\frac{1}{8}}$.

   (a) Montrer que
   $$(x_{k+1} - \alpha) = (x_k - \alpha)\left[1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha)\right].$$

   (b) En utilisant (a) et que $\phi_{\frac{1}{8}}([3, 4]) \subset [3, 4]$ (vu à la question 4), montrer que pour $n \geqslant 0$:
   $$|x_{k+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{5 - \alpha}{8}\right) |x_k - \alpha| .$$

   (c) En déduire que pour $n \geqslant 0$:
   $$|x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{5 - \alpha}{8}\right)^k |x_0 - \alpha| .$$

   (d) En déduire que la suite $(x_k)_{k \geqslant 0}$ converge vers α, et que la convergence est linéaire.

(e) Montrer que pour $k \geqslant 0$: $|x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$, puis estimer le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une valeur de α précise à 10^{-3} près.

Correction

1. On a $\phi_1(\alpha) = \alpha - f(\alpha) = \alpha$ (car α est une racine de f), donc α est bien un point fixe de ϕ_1.
On a : $x_1 = 3 - (9 - 10) = 4$, puis $x_2 = 4 - (16 - 10) = -2$ puis $x_3 = -2 - (4 - 10) = 4 = x_1$. Les itérés suivants de la suite vont donc être alternativement -2 et 4. On en déduit la non-convergence de la méthode du point fixe appliquée à ϕ_1 en partant de $x_0 = 3$, voir la Figure 3 (gauche).

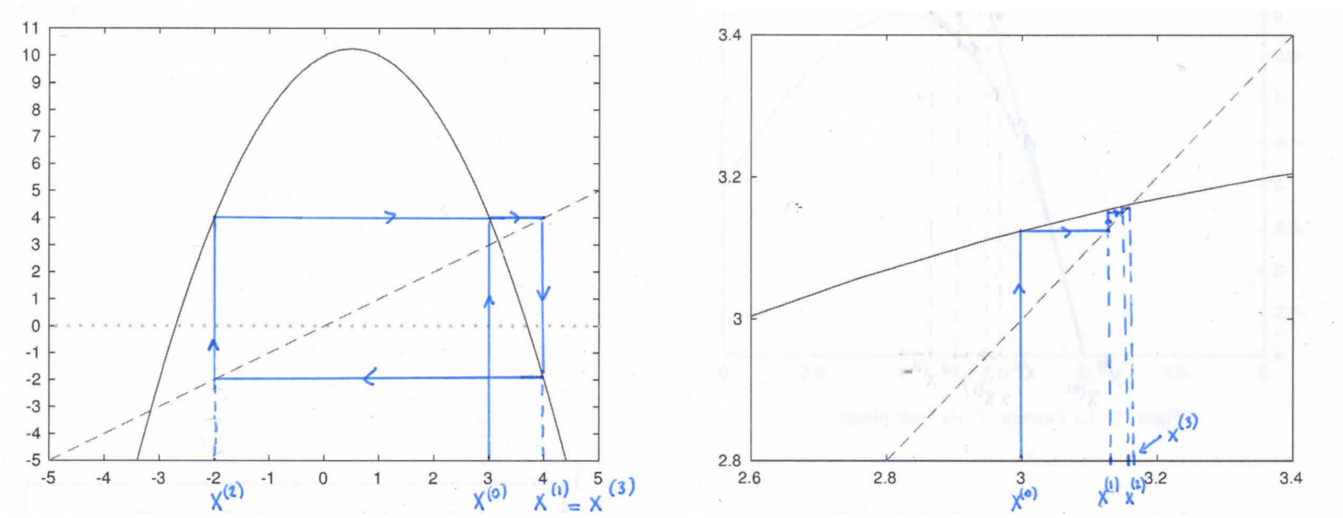

FIGURE 3 – Gauche : graphe représentatif de la fonction ϕ_1 (en train plein noir). Droite : graphe représentatif de la fonction $\phi_{\frac{1}{8}}$ (en train plein noir). Pour chaque figure la courbe en pointillés est la droite $y = x$, et les premiers itérés de la méthode du point fixe, en partant de $x_0 = 3$, sont en bleu clair.

2. On a

$$f(\alpha) = 0 \iff \omega f(\alpha) = 0 \quad (\text{car } \omega \neq 0) \iff \alpha - \omega f(\alpha) = \alpha \iff \phi_\omega(\alpha) = \alpha,$$

et donc α est un point fixe de ϕ_ω.

3. Voir la Figure 3 (droite).

4. Appliquons le théorème du cours :
   - ◇ $\phi_{\frac{1}{8}}$ est continue sur $[3, 4]$ (c'est un polynôme).
   - ◇ On a $\phi_{\frac{1}{8}}([3, 4]) \subset [3, 4]$. En effet, $\phi_{\frac{1}{8}} \in \mathcal{C}^1([3, 4])$ et $\phi'_{\frac{1}{8}}(x) = 1 - \frac{x}{4}$ qui est positif sur $[3, 4]$, donc $\phi_{\frac{1}{8}}$ est croissante sur $[3, 4]$. Puisque $\phi_{\frac{1}{8}}$ est continue et croissante sur $[3, 4]$, on a $\phi_{\frac{1}{8}}([3, 4]) = [\phi_{\frac{1}{8}}(3), \phi_{\frac{1}{8}}(4)] = [3 + \frac{1}{8}, 4 - \frac{6}{8}] \subset [3, 4]$ (on peut aussi faire un tableau de variations).
   - ◇ On a $|\phi'_{\frac{1}{8}}(x)| \leqslant \frac{1}{4} < 1, \ \forall x \in [3, 4]$, donc $\phi_{\frac{1}{8}}$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz $L = \frac{1}{4} \in]0, 1[$.

D'après le théorème du cours, $\phi_{\frac{1}{8}}$ a donc un unique point fixe α dans $[3, 4]$, et la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (de la méthode du point fixe) converge vers α, pour tout x_0 dans $[3, 4]$.

5. On a $\phi_{\frac{1}{8}} \in \mathcal{C}^1([3, 4])$ et

$$\phi'_{\frac{1}{8}}(\alpha) = 1 - \frac{\sqrt{10}}{4}, \tag{7}$$

ce qui implique que $|\phi'_{\frac{1}{8}}(\alpha)| < 1$. Donc α est un point attractif de $\phi_{\frac{1}{8}}$. De plus, d'après (7), on a $\phi'_{\frac{1}{8}}(\alpha) \neq 0$ et donc la convergence est linéaire.

6. (a) On a :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{8}\left[(x_k)^2 - 10\right].$$

De plus, comme $f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 10 = 0 \iff \alpha^2 = 10$, on a

$$(x_k)^2 - 10 = (x_k)^2 - \alpha^2 = (x_k - \alpha)(x_k + \alpha).$$

On a donc

$$(x_{k+1} - \alpha) = (x_k - \alpha)\left[1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha)\right].$$

(b) Puisque $x_0 = 3$, que $x_{k+1} = \phi_{\frac{1}{8}}(x_k)$ et que $\phi_{\frac{1}{8}}([3,4]) \subset [3,4]$, on a bien sûr que $x_k \in [3,4]$ pour tout $n \geqslant 0$. On en déduit que

$$\frac{3+\alpha}{8} \leqslant \frac{1}{8}(x_k + \alpha) \leqslant \frac{4+\alpha}{8}$$

et donc

$$0 \leqslant \frac{4-\alpha}{8} \leqslant 1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha) \leqslant \frac{5-\alpha}{8},$$

ce qui permet d'établir que

$$\left|1 - \frac{1}{8}(x_k + \alpha)\right| \leqslant \frac{5-\alpha}{8}.$$

En utilisant l'inégalité précédente et celle de la question (a), on obtient le résultat demandé.

(c) De la question (b) on montre, par un récurrence sur k, que pour $k \geqslant 0$:

$$|x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{5-\alpha}{8}\right)^k |x_0 - \alpha|. \tag{8}$$

En effet, cette inégalité est vraie pour $k = 0$, puisque $|x_0 - \alpha| \leqslant |x_0 - \alpha|$, pour tout x_0 dans $\mathbb{R}$. Supposons que (8) est vraie jusqu'au rang k, et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$: de la question (b) on a

$$|x_{k+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{5-\alpha}{8}\right)|x_k - \alpha|,$$

On utilise maintenant l'hypothèse de réccurence :

$$|x_{k+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{5-\alpha}{8}\right)\left(\frac{5-\alpha}{8}\right)^k |x_0 - \alpha| = \left(\frac{5-\alpha}{8}\right)^{k+1} |x_0 - \alpha|.$$

Par conséquent (8) est vraie au rang $k+1$. Elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(d) Maintenant, puisque $\alpha \geqslant 3$, on a $\frac{5-\alpha}{8} \leqslant \frac{1}{4} < 1$. La suite des x_k converge donc vers α au moins aussi rapidement qu'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$, et la convergence est linéaire.

(e) De la question (d), on a $\frac{5-\alpha}{8} \leqslant \frac{1}{4}$. En utilisant cette inégalité dans celle de la question (c), on obtient

$$|x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^k |x_0 - \alpha|.$$

De plus, on a $\alpha \leqslant 3 + \frac{1}{4}$, donc pour $x_0 = 3$ on a $|x_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}$. D'où

$$|x_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^k |x_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}.$$

Donc, pour $k = 3$ on aura $|x_3 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^8}$, avec $\frac{1}{2^8} > 10^{-3}$, et pour $k = 4$, on aura $|x_4 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{10}} \leqslant 10^{-3}$. Le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une valeur de α précise à 10^{-3} près est donc $k = 4$.

Remarque. *On peut aussi trouver cette valeur en disant qu'une condition suffisante pour avoir $|x_k - \alpha| \leqslant 10^{-3}$ est de prendre $k \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \leqslant 10^{-3} \iff (k+1)\ln(\frac{1}{4}) \leqslant \ln(10^{-3}) \iff k \geqslant \frac{\ln(10^{-3})}{\ln(\frac{1}{4})} - 1,$$

ce qui donne $k \geqslant 4$. Il faut ensuite vérifier que le cas $k = 3$ donne une erreur plus grande que 10^{-3}.

Méthodes de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 7

Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée continue sur $\mathbb{R}$) qui admet une racine $\bar{x} \in \mathbb{R}$. La méthode de Newton est une méthode iterative d'approximation de $\bar{x}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $k \geqslant 0$, on définit x_{k+1} par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{9}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que sous certaines conditions, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$.

1. Sous quelle condition la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?

2. Interpréter graphiquement l'algorithme (9).

3. Montrer que l'algorithme de Newton est un algorithme du point fixe appliqué à une fonction g que l'on déterminera.

4. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et que $f'(\overline{x}) \neq 0$. En déduire une condition suffisante de convergence de l'algorithme de Newton.

5. On suppose que $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ avec $f'(\overline{x}) \neq 0$, et $f''(\overline{x}) \neq 0$. Montrer que la méthode de Newton, lorsqu'elle converge est d'ordre 2 (on dit alors que l'erreur de convergence est quadratique).

Correction

1. Pour que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bien définie, il faut que chacun de ses termes soient bien définis. Pour cela, il faut et il suffit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f'(x_k)$ ne s'annule pas. En particulier, si f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors la suite est bien définie.

2. Le terme x_{k+1} défini par (9) est l'intersection entre la tangente à f au point x_k et l'axe des abscisses $y = 0$ (voir Figure 4) : en effet, l'équation de la tangente à f au point x_k est donnée par

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k).$$

Le point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente est le point d'abscisse $\tilde{x}$ (et d'ordonnée 0), tel que $0 = f'(x_k)\tilde{x} + (f(x_k) - f'(x_k)x_k)$, c'est à dire

$$\tilde{x} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

On retrouve bien que $x_{k+1} = \tilde{x}$.

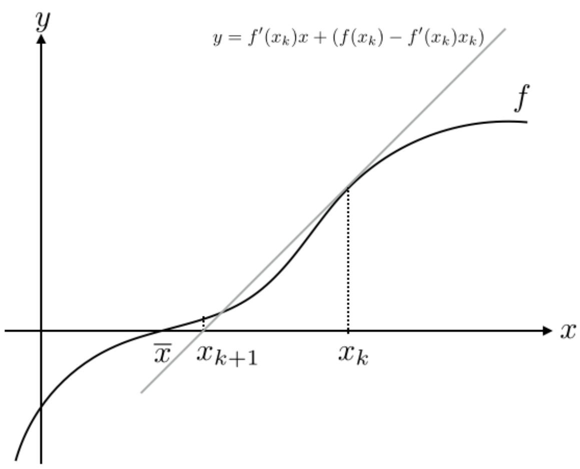

FIGURE 4 – Illustration de la méthode de Newton. Le point x_{k+1} est défini comme l'intersection entre l'axe des abscisses et la tangent à la courbe f au point x_k (en gris sur le dessin, droite d'équation $y = f'(x_k)x + (f(x_k) - f'(x_k)x_k)$)

Remarque. *Si $f'(x_k) = 0$, la tangente à f au point x_k est parallèle à l'axe des abscisses. Il n y a donc pas de point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à f au point x_k. On retrouve bien que l'on ne peut pas définir x_{k+1} dans ce cas.*

3. Il suffit de remarquer que $x_{k+1} = g(x_k)$ où

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{10}$$

Si $f'(x)$ ne s'annule pas (au moins localement près de $\bar{x}$), alors $g(x)$ est une fonction continue dans un voisinage de $\bar{x}$.

4. Puisque f est deux fois dérivable et que $f'(\bar{x}) \neq 0$, g est $\mathcal{C}^1$ en utilisant l'exercice 4, on sait que la méthode du point fixe associée à g va converger localement (c'est à dire pour x_0 est suffisamment proche de $\overline{x}$) si $|g'(\overline{x})| < 1$. Or,

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}. \tag{11}$$

On rappelle que par définition $f(\overline{x}) = 0$. Si l'on suppose que $f'(\overline{x}) \neq 0$, alors $g'(\overline{x}) = 0$. Donc, $|g'(\overline{x})| < 1$, et il existe un nombre réel $\eta > 0$ et un nombre réel $K \in]0,1[$ tels que, pour tout $x \in [\overline{x} - \eta, \overline{x} + \eta]$,

$$|g'(x)| \leqslant K < 1.$$

Par suite, si $x_0 \in [\overline{x} - \eta, \overline{x} + \eta]$, l'algorithme de Newton converge (cf. exercice 4).

Remarque. *L'algorithme de Newton converge localement. Cela signifie qu'il faut choisir x_0 suffisamment proche de $\overline{x}$ pour que ce dernier converge.*

4. Supposons que f est trois fois dérivable et que $f'(\overline{x}) \neq 0$, et $f''(\overline{x}) \neq 0$. Par conséquent, g est deux fois dérivable. De plus, d'après (11), $g'(\overline{x}) = 0$ et $g''(\overline{x}) \neq 0$. En utilisant l'exercice 4 (ou la Proposition 2.6 du cours), on en déduit que la méthode de Newton est d'ordre 2. On dit alors que l'erreur $e_k = x_k - \alpha$ est quadratique : en effet, pour k suffisamment grand,

$$|e_{k+1}| \leqslant C|e_k|^2.$$

Exercice 8 (Application)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

1. Quelles sont les racines de l'équation $f(x) = 0$?

Nous allons illustrer les résultats vus en cours sur la convergence de la méthode de Newton appliquée à la résolution de cette équation.

2. Calculer $f'(x)$ et écrire la relation de récurrence liant deux itérés successifs de la méthode de Newton sous la forme $x^{(k+1)} = F\left(x^{(k)}\right)$ avec une fonction F que l'on précisera.
3. Utiliser le graphe de la Figure 5 pour appliquer les 3 premières itérations de la méthode de Newton avec f, en partant de $x^{(0)} = -2$.

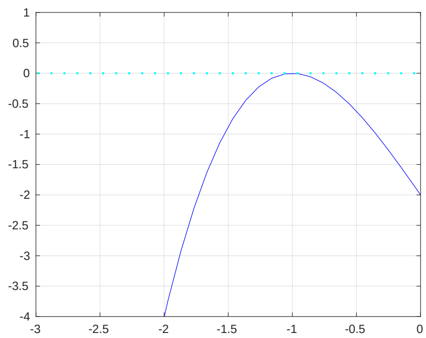

FIGURE 5 – La fonction f (en trait plein)

4. Selon les résultats vus dans l'exercice 5, qu'attend on comme convergence de la suite de Newton autour des racines calculées à la question 1) ?

Correction

1. Racines évidentes : 2 (racine simple) et -1 (racine double).

2. On obtient $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$. La suite s'écrit alors, pour $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ donné :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)},$$

soit, en simplifiant lorsque $x^{(k)} \neq -1$:

$$x^{(k+1)} = \frac{2}{3}\left(\frac{\left(x^{(k)}\right)^2 - x^{(k)} + 1}{x^{(k)} - 1}\right).$$

On pose donc $F(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)$.

3. Voir la Figure 6 ci-dessous.

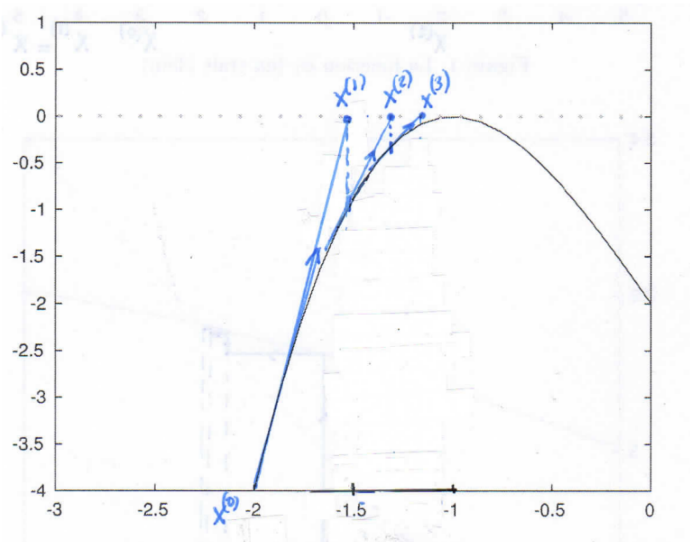

FIGURE 6 – Graphe représentatif de la fonction f (en train plein) ainsi que des premiers itérés de la méthode de Newton (en bleu), en partant de $x_0 = -2$

4. Autour de 2 : $f(2) = 0$ et $f'(2) \neq 0$. D'après le cours on attend une convergence quadratique, à condition que la donnée initiale $x^{(0)}$ soit suffisamment proche de 2.
Autour de -1 : $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = 0$. D'après le cours on attend une convergence linéaire. On peut le voir en appliquant la propriété sur la convergence des méthodes de point-fixe (avec $p = 0$). On a

$$F'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right),$$

et donc $F'(-1) = \frac{1}{2}$, on attend donc (asymptotiquement) une convergence linéaire de raison $\frac{1}{2}$.

5. On a

$$F(x) - 2 = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2-4x+4}{x-1}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{(x-2)^2}{x-1}\right). \tag{12}$$

On a donc dans un premier temps que $x^{(k+1)} - 2 = F\left(x^{(k)}\right) - 2 > 0$ dès que $x^{(k)} > 1$. Si $x^{(0)} > 1$, on a donc $x^{(k)} > 2$ pour tout $k \geqslant 1$. Ensuite, en remarquant que pour tout $x > 2$, $\frac{(x-2)}{(x-1)} < 1$, on a donc, avec (12) :

$$\left|x^{(k+1)} - 2\right| = \left|F\left(x^{(k)}\right) - 2\right| \leqslant \frac{2}{3}\left|x^{(k)} - 2\right|,$$

pour tout $k \geqslant 1$. Ceci implique (en faisant une récurrence sur k) que

$$\left|x^{(k)} - 2\right| \leqslant (\frac{2}{3})^{(k-1)}\left|x^{(1)} - 2\right|, \quad \forall k \geqslant 1.$$

Comme $|\frac{2}{3}| < 1$, cela entraîne la convergence de la suite $\{x^{(k)}\}$ vers 2. Par conséquent il existe $k_0 \geqslant 1$ tel que $\left|x^{(k_0)} - 2\right| < \frac{3}{2}$. D'autre part, puisque $\frac{1}{x-1} \leqslant 1$ lorsque $x > 2$, on a aussi, avec (12) :

$$\left|x^{(k+1)} - 2\right| = \left|F\left(x^{(k)}\right) - 2\right| \leqslant \frac{2}{3}\left|x^{(k)} - 2\right|^2, \quad \forall k \geqslant 1. \tag{13}$$

6. D'où, pour tout $k_0 \geqslant 1$ et tout $k \geqslant k_0$

$$\frac{2}{3}\left|x^{(k)} - 2\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\left|x^{(k_0)} - 2\right|\right)^{2^{(k-k_0)}}. \tag{14}$$

En effet, l'inégalité ci-dessus est vraie pour $k = k_0$. Supposons qu'elle est vrais jusqu'au rang $k \geqslant k_0$ et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$: en utilisant (13) et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\left|x^{(k+1)} - 2\right| &\leqslant \left(\frac{2}{3}\left|x^{(k)} - 2\right|\right)^2 \\ &\leqslant \left(\left(\frac{2}{3}\left|x^{(k_0)} - 2\right|\right)^{2^{(k-k_0)}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\left|x^{(k_0)} - 2\right|\right)^{2^{(k+1-k_0)}},\end{aligned}$$

ainsi (14) est vraie pour tout $k \geqslant k_0$. On aura donc une convergence quadratique de la suite (ce qui correspond bien à ce que nous avions dit à la question c).

Exercice 9 (Application : calcul approché de $\sqrt{a}$)

1. Ecrire l'algorithme de Newton pour la résolution de $x^2 - a = 0$, où a est un réel strictement positif.
2. Lorsque $a = 2$ et que l'itéré initial est $x^{(0)} = 2$, calculer les trois premiers itérés de cette suite sous forme fractionnaire et sous forme décimale approchée ; comparez avec $\sqrt{2}$ dont une valeur approchée à 10^{-10} près est $1,4142135624$. Comparez avec la précision donnée par l'algorithme de dichotomie (voir Exercice 1).
3. Montrer que $(x^{(n+1)} - \sqrt{a}) = \frac{1}{2x^{(n)}}(x^{(n)} - \sqrt{a})^2$. En déduire que si $x^{(0)} \geqslant 0$, alors $x^{(n)} \geqslant \sqrt{a}$ pour tout $n \geqslant 1$ puis montrer que la suite est décroissante à partir de $n = 2$.
4. En déduire que la suite converge quadratiquement vers $\sqrt{a}$. Est ce le résultat attendu en appliquant le théorème vu en cours ?

Correction

1. On a $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{(x^{(n)})^2 - a}{2x^{(n)}} = \frac{1}{2}\left(x^{(n)} + \frac{a}{x^{(n)}}\right)$.

2. $x^{(1)} = \frac{3}{2} = 1,5$, $x^{(2)} = \frac{17}{12} \approx 1,4166666666667$, $x^{(3)} = \frac{577}{408} \approx 1,41421568627$. Au bout de 3 itérations, on a déjà une erreur relative d'environ $1.02\ 10^{-6}$, qu'on aurait obtenue seulement en environ 21 itérations de la méthode de dichotomie.

3. On a

$$(x^{(n+1)} - \sqrt{a}) = \frac{1}{2x^{(n)}}\left((x^{(n)})^2 + a - 2x^{(n)}\sqrt{a}\right)$$

ce qui fournit le résultat et implique la positivité de $(x^{(n+1)} - \sqrt{a})$. De plus, on a $x^{(n+1)} - x^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x^{(n)}} - x^{(n)}\right)$ qui est bien négatif pour $n \geqslant 1$ puisque $x^{(n)} \geqslant \sqrt{a}$ pour $n \geqslant 1$.

4. La suite est minorée et décroissante et donc convergente. Par ailleurs, on peut majorer $\frac{1}{2x^{(n)}}$ par $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ pour tout $n \geqslant 1$, et on a donc $|x^{(n+1)} - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(x^{(n)} - \sqrt{a})^2$, ce qui est bien une convergence quadratique. C'était le résultat attendu car le théorème dit que la méthode de Newton converge quadratiquement vers la solution x^* de $f(x) = 0$ lorsque $f'(x^*) \neq 0$ (à condition que l'itéré initial soit suffisamment proche de x^*).