Exposé du 04/03/21

Chapitre 1. Définitions générales.

G gpe fini

1. Représentations, exemples

Définition 1.1.1 Une représentation complexe de dimension finie de G est un couple (V, ρ) où V est un $\mathbb{C}$-e.v. de dim finie et $\rho : G \to GL(V)$ un morphisme de groupes. La dimension d'une rep. est celle de l'e.v. sous-jacent.

Pour $g \in G$, on notera parfois $g_{|V}$ au lieu de $\rho(g)$. Pour $(g, v) \in G \times V$ on note souvent $g.v$ pour $(\rho(g))(v)$.

Rem 1.1.2 : Si (V, ρ) est une rep. de G, alors, pour $\forall g \in G$, $\rho(g)$ est nécessairement diagonalisable. En effet, comme G est fini, tout élt de G est d'ordre fini. Donc, pour $\forall g$ ds G, l'endo. $\rho(g)$ est d'ordre fini : il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tq $\rho(g)^d = id_V$. Ce qui revient à dire que $X^d - 1$ est annulateur de $\rho(g)$. Or, sur $\mathbb{C}$, $X^d - 1$ est scindé à racines simples. Donc $\rho(g)$

est diagonalisable et de plus, les v.p. de $\rho(g)$ sont toutes des racines d-ièmes de l'unité.

Rem. 1.1.3 Soit (V, ρ) une repr. de G.
On peut munir V d'une structure d'e.v. hermitien. Notons H_0 cette structure. Ainsi $H_0 : V \times V \to \mathbb{C}$, sesquilinéaire, symétrique, positive, définie. On peut alors construire une nouvelle structure hermitienne (qui, elle, tient compte de G) en posant $H : V \times V \to \mathbb{C}$ déf. par, $\forall v, w \in V$, $H(v, w) = \sum_{g \in G} H_0(g.v, g.w)$. Il est facile de vérifier que H est un p.s. hermitien. Il est aussi facile de vérifier que : $\forall g \in G$, $\rho(g)$ est unitaire pour H.

Rmq 1.1.4 Soit (V, ρ) une repr. de dim. $n \in \mathbb{N}^*$. Le choix d'une base de V détermine un iso. de groupe : $GL(V) \to GL(\mathbb{C}^n) \to GL_n(\mathbb{C})$
Un tel choix détermine donc un morphisme de groupes : $G \xrightarrow{\rho} GL(V) \to GL_n(\mathbb{C})$.
Dans ce sens, construire des rep. de dim. finie de G revient à "réaliser concrètement" G et ses quotients comme sous-gpes de groupes de matrices.

Ex. 1.1.5 : La représentation nulle. On appelle représentation nulle de G tout couple (V, ρ) où V est un e.v. réduit à $\{0_V\}$ et ρ un morphisme $G \to GL(V) = \{id_V\}$.

Ex. 1.1.6 La représentation triviale. L'appl. $\tau : G \to GL(\mathbb{C})$, $g \mapsto id_{\mathbb{C}}$, est un morphisme de gpe. La rep. $(\mathbb{C}, \tau)$ est appelée repr. triviale de G. (Parfois noté $\mathbb{1}_G$.)

Ex. 1.1.7 St $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathfrak{S}_n$ le gpe sym. correspondant (gpe des bij. ensemblistes de l'ens. $\{1, \dots, n\}$). La représentation naturelle de $\mathfrak{S}_n$ est, par définition, le couple $(\mathbb{C}^n, \nu_n)$ où

$$\nu_n : \mathfrak{S}_n \longrightarrow GL(\mathbb{C}^n)$$
$$\sigma \longmapsto f_\sigma$$

avec, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f_\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tq, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. (Ci-dessus $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$.)

Si, par ex., $n = 3$ et $\sigma = (1, 2, 3)$. Alors $f_\sigma : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $e_1 \to e_2$, $e_2 \to e_3$, $e_3 \to e_1$. Autrement dit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f_\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On observe facilement que, si $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, alors $f_\sigma(z) = (z_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(n)})$.

Définition 1.1.8 Soient $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ des rep. de G. Un morphisme de représentat° est une application linéaire $\phi : V_1 \to V_2$ qui commute à l'action de G càd tq :

$$\boxed{\forall g \in G, \quad \rho_2(g)\circ\phi = \phi\circ\rho_1(g).}$$

Un isomorphisme de rep. est un morph. de rep. ϕ tq ϕ soit inversible.

Graphiquement, un morph. de rep. est donc une appl. lin $\phi : V_1 \to V_2$ tq, $\forall g \in G$, le diagramme suivant soit comm. :

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\
V_1 \arrow[r, "\phi"'] & V_2
\end{tikzcd}.$$

Définition 1.1.9 Si (V, ρ) est une rep. de G, une sous-rep. de (V, ρ) est la donnée d'un sev W de V tq $\forall g \in G$, $\rho(g)(W) \subseteq W$.

Si W est une ss-rep de (V, ρ), alors ρ induit un morphisme de gpes
$$\rho_{|W} : G \longrightarrow GL(W)$$
$$g \longmapsto \rho(g)_{|W}.$$

Obs. : Si W est une sous-rep. de (V, ρ) et si $\mathcal{B}$ est une base de V adaptée à W, alors, $\forall g \in G$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho(g)) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline \underbrace{0}_{\text{base de } W} & * \end{array}\right) \} \text{base de } W$$

Commentaire : on verra au chap. 2 que l'on peut tjs choisir $\mathcal{B}$ de sorte que le bloc en haut à droite soit nul pour $\forall g \in G$.

Obs. : St (V, ρ) une rep. et W une sous-rep. de V. On considère l'e.v. quotient V/W. Pour tout elt g de G, l'endo. $\rho(g)$ induit un endo. de V/W : $\rho_{V/W}(g) : V/W \to V/W$. Alors, on vérifie facilement que l'applicat° $\rho_{V/W}(g)$ est inv. et que l'application

$$\rho_{V/W} : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL(V/W) \\ g & \longmapsto & \rho_{V/W}(g) \end{array}$$

est un morphisme de gpes.

Déf. 1.1.11 $(V/W, \rho_{V/W})$ est appelée la repr. quotient de (V, ρ) par la sous-rep. W.

Rappel: Si V est un e.v. et W un ss-ev alors en particulier V est un gpe (comm.) pour $+$ et W un ss-gpe de V. On peut donc considérer le gpe quotient V/W. On rappelle que ses éléments sont les classes d'éq. modulo W des élts de V càd les classes d'éq. de V pour la relation d'équiv. $v \sim w$ ssi $v - w \in W$.
On a alors une application $\pi : V \longrightarrow V/W$
$$v \longmapsto \bar{v}$$

classe d'équiv. de v modulo W

qui est un morphisme de groupes. Càd que, en particulier, $\bar{v} + \bar{w} = \overline{v+w}$, $\forall v, w \in V$.
On vérifie alors que, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, l'appl.
$$\cdot : \mathbb{C} \times V/W \longrightarrow V/W \qquad \text{est bien définie}$$
$$(\lambda, \bar{v}) \longmapsto \overline{\lambda v}$$
et que $(V/W, +, \cdot)$ est un e.v. sur $\mathbb{C}$ tq de plus $\pi : V \longrightarrow V/W$ st linéaire.

Si de plus $f : V \longrightarrow V$ est un endo. qui stabilise le ssev W, il est facile de voir qu'il induit un endo.
$$\bar{f} : V/W \longrightarrow V/W$$
$$\bar{v} \longmapsto \overline{f(v)}$$

Ex. 1.1.12 A lire seuls.

Ex. 1.1.13 : Le noyau et l'image d'un morphisme de représentations sont des sous-rep.

Ex. 1.1.14 : On suppose G commutatif. Alors toute représentation de G est somme directe de sous-rep. de dim. 1.

Rem 1.1.15 : On suppose que H est un sgpe distingué de G et on $\tilde{c}$ la proj. canonique $\pi : G \longrightarrow G/H$.

1. Si (V, ρ) est une repr. de G/H, alors $(V, \rho \circ \pi)$ est une representation de G.

Note: $G \xrightarrow{\pi} G/H \xrightarrow{\rho} GL(V)$.

2. Si (V, ρ) et (W, τ) sont deux repr. de G/H, alors (V, ρ) et (W, τ) sont des rep. de G/H iso. ssi $(V, \pi \circ \rho)$ et $(W, \pi \circ \tau)$ sont des rep. de G isomorphes.

1.2 Caractères d'un groupe et rep. de dim 1.

Déf. 1.2.1 Soit H un gpe. Un caractère complexe de H est un morphisme de gpes de H ds $\mathbb{C}^*$. On note $\hat{H}$ l'ens. des caract.

complexes de H.

Rmq 1.2.2. Soit H un gpe.
1. Si χ est un caract. complexe de H, cad $\chi : H \to \mathbb{C}^*$, il induit une applicat° $H \to \mathbb{C}$. Ainsi tout caractère complexe de H peut être vu comme un elt de $\mathbb{C}^G$.
2. Comme $\mathbb{C}^*$ est un gpe, on peut considérer le produit de deux caractères, défini comme suit : si $\chi, \delta : H \to \mathbb{C}^*$ sont des caractères, on pose :

$$\chi \cdot \delta : H \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$h \longmapsto \chi(h)\delta(h)$$

On vérifie facilement que $\chi\delta$ est un caractère. On vérifie facilement aussi que

$$\hat{H} \times \hat{H} \longrightarrow \hat{H}$$
$$(\chi, \delta) \longmapsto \chi\delta$$

munit $\hat{H}$ d'une structure de gpe.

Ainsi $\hat{H}$ devient un gpe commutatif.

Déf. 1.2.3

Rmq. 1.2.4

Rmq 1.2.5 Si H est un gpe fini d'ordre n, tous ses élts ont un ordre fini qui divise n : $\forall h \in H$, $h^n = e_G$. Il s'ensuit que si $\chi : H \to \mathbb{C}^*$ est un caractère, alors $\forall h \in H$, $\chi(h)^n = 1$. Donc un caractère de H prend ses valeurs dans le gpe μ_n des racines n-ièmes de l'unité.

En particulier, si H est fini, $\hat{H}$ l'est aussi.

De plus, si H est fini, pour $\forall$ caract. χ, $\overline{\chi} = \chi^{-1}$.

Rappel : Si G est un gpe, on note $D(G)$ son ss gpe dérivé. C'est le ssgpe engendré par les élts de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$. Ce ss gpe est un sous-groupe distingué et le quotient correspondant est un gpe commutatif. Ce quotient est appelé l'abélianisé de G. On le notera G_{ab}.

Comme $\mathbb{C}^*$ est commutatif, pour tout caractère $\chi : H \to \mathbb{C}^*$, si $g, h \in H$, $\chi(ghg^{-1}h^{-1}) = 1$. C-à-d que $D(G) \subseteq \ker(\chi)$. On peut donc factoriser χ de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, bend right, "\chi"'] & H/D(H) = H_{ab} \arrow[d, dashed, "\tilde{\chi}"] \\
& \mathbb{C}^*
\end{tikzcd}$$

tq $\tilde{\chi} \circ \pi = \chi$. On a ainsi construit une application :

$$\begin{aligned} \alpha : \hat{H} &\longrightarrow \widehat{H_{ab}} \\ \chi &\longmapsto \tilde{\chi} \end{aligned}$$

De m̃, si χ est un caractère de H_{ab}, alors $\chi \circ \pi : H \xrightarrow{\pi} H_{ab} \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^*$ est un caract. de H. D'où une application :

$$\begin{aligned} \beta : \widehat{H_{ab}} &\longrightarrow \hat{H} \\ \chi &\longmapsto \chi \circ \pi \end{aligned}.$$

<u>Prop. 1.2.6.</u> Les applications α et β sont des morphismes de groupes, inverses l'un de l'autre. En particulier, $\widehat{H_{ab}} \simeq \hat{H}$.

<u>Dém.</u> Ex facile. ■

Soient H et K deux gpes et $H \times K$ leur produit direct.

<u>Q</u> : quel rapport y a-t-il entre $\widehat{H\times K}$ et $\hat{H}\times\hat{K}$.

<u>R</u> : ils st isomorphes.

• Si χ est un caract. de $H\times K$, alors les application $\chi(-, e_K) : H \longrightarrow \mathbb{C}^*$
$h \longmapsto \chi(h, e_K)$

et $\chi(e_H, -) : K \longrightarrow \mathbb{C}^*$
$k \longmapsto \chi(e_H, k)$

st resp. des caractères de H et K. D'où une appl.

$$\gamma : \widehat{H\times K} \longrightarrow \hat{H}\times\hat{K}$$
$$\chi \longmapsto (\chi(-, e_K), \chi(e_H, -))$$

Si $\phi \in \hat{H}$ et $\psi \in \hat{K}$. Alors l'appl.

$$H\times K \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$(h, k) \longmapsto \phi(h)\psi(k)$$

est un caractère de $H\times K$. D'où une application

$$\delta : \hat{H}\times\hat{K} \longrightarrow \widehat{H\times K}$$
$$(\phi, \psi) \longmapsto \phi\psi$$

<u>Prop. 1.2.7</u> : Les appl. γ et δ st des morphismes de gpes, inverses l'un de l'autre. En part. : $\widehat{H\times K} \simeq \hat{H}\times\hat{K}$.

Rmq 1.2.8 :

1. Si (V,ρ) est une rep. de G de dim. 1, on peut identifier $GL(V)$ et $\mathbb{C}^*$ en envoyant tout élt de $GL(V)$ sur le rapport d'homothétie corresp. (cf : $\forall$ élt de $GL(V)$ est une homothétie).
Posons $\iota : GL(V) \to \mathbb{C}^*$ ainsi défini.
A la rep. (V,ρ) on peut donc associer le caractère $\iota \circ \rho : G \xrightarrow{\rho} GL(V) \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}^*$.
De plus, si (V,ρ) et (W,σ) sont deux rep. de dim. 1 isomorphes, alors $\iota \circ \rho = \iota \circ \sigma$.

2. Réciproquement, si $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ est un caractère de G, alors on peut considérer

$$j : \mathbb{C}^* \longrightarrow GL(\mathbb{C}).$$
$$\lambda \longmapsto \lambda \, id_{\mathbb{C}}$$

puis considérer la rep. de dim. 1 :
$j \circ \chi : G \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^* \xrightarrow{j} GL(\mathbb{C})$

3. On vérifie facilement que les processus décrits aux points 1 et 2 ci-dessus sont inv. l'un de l'autre. Ainsi se donner un caractère de G est équivalent à se donner une classe d'isomorphie de rep. de dim 1.

Ex. 1.2.9 Le cas de $\mathfrak{S}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$.

But : déterminer (à iso. près) toutes les rep. de dim. 1 de $\mathfrak{S}_n$.

D'après la Rem. 1.2.8 cela revient à déterminer tous les caractères de $\mathfrak{S}_n$.

Rappel : Si $1 \leq i \leq n-1$, on pose $s_i := (i, i+1)$.
On rappelle que le gpe $\mathfrak{S}_n$ est engendré par $s_1, \dots, s_{n-1}$ et que, d'autre part, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$.

Il en découle que, si $\chi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est un caractère, alors l'image par χ de $s_1, \dots, s_{n-1}$ est la même. Mais de plus, les s_i sont d'ordre 2. Donc :

ou bien $\chi(s_i) = 1$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$; et alors $\chi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $g \mapsto 1$.

ou bien $\chi(s_i) = -1$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$; alors
$$\chi = \mathrm{sgn} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \sigma & \longmapsto & \mathrm{sgn}(\sigma) \end{array}.$$

Ex. 1.2.10 : Si $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$.

But : le m̂ que en 1.2.9 mais pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On pose $\mu_n = \{ z \in \mathbb{C} / z^n = 1 \} = \{ e^{\frac{2 i k \pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1 \}$

Rappel : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1} \}$; c'est un gpe cyclique engendré par $\bar{1}$ et $\bar{1}$ est d'ordre n. En particulier $\underbrace{n}_{\in \mathbb{N}} \bar{1} = \bar{0}$.

Pour cette raison un caractère est complètement déterminé par sa valeur sur $\bar{1}$ et de plus l'image de $\bar{1}$ par ce caractère doit être une racine n-ième de 1.
Ainsi, si χ est un caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors $\chi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mu_n \subseteq \mathbb{C}^*$.

Ceci montre qu'il existe une application injective

$$i_n : \widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \longrightarrow \mu_n$$

$$\chi \longmapsto \chi(\bar{1})$$

qui est clairement un morph. de groupes.
Récip., si $0 \leq k \leq n-1$, le morph. de gpe $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, qui envoie 1 sur $e^{2ik\pi/n}$ contient $n\mathbb{Z}$ ds son noyau et induit un morphisme de gpes $\phi_k : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^*$.
Il est immédiat que $i_n(\phi_k) = e^{2ik\pi/n}$
Donc i_n est surjective.

<u>Exemple 1.2.11</u>

<u>Exemple 1.2.12</u> On rappelle que tout gpe abélien fini est un produit direct de la forme $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_p\mathbb{Z}$.

Mais, en utilisant la proposition 1.2.7, le calcul du gpe dual de $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_p\mathbb{Z}$ se ramène à celui des gpes duaux $\widehat{\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}}, \dots, \widehat{\mathbb{Z}/n_p\mathbb{Z}}$. Ces gpes duaux st connus cf Ex. 1.2.10. Par ailleurs, comme G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_p\mathbb{Z}$, le dual de G est iso. à celui de $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_p\mathbb{Z}$.

<u>Bilan</u> : le gpe dual de tout gpe abélien fini est donc iso. à un gpe $\mu_{n_1} \times \dots \times \mu_{n_p}$.

<u>Ex. 1.2.13</u> : On peut calculer les rep. de dim. 1 de tout gpe fini (via celles de son abélianisé et via l'ex. 1.2.12).