(Exposé du 18/03/21)

Compléments sur le produit tensoriel

Rmq 2.5 Si I et J sont des ensembles non vides, $(U_i)_{i\in I}$ et $(V_j)_{j\in J}$ des familles de $\mathbb{k}$-ev, il existe un unique isomorphisme

$$\Theta : \underbrace{\left(\bigoplus_{i\in I} U_i\right)}_{\text{sommes}} \otimes \underbrace{\left(\bigoplus_{j\in J} V_j\right)}_{\text{directes externes}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I, j\in J} U_i \otimes V_j$$

tq

$$(u_i)_{i\in I} \otimes (v_j)_{j\in I} \longmapsto (u_i \otimes v_j)_{(i,j)\in I\times J}$$

Proposition 2.6 Soit U et V des $\mathbb{k}$-ev, I et J des ensembles et $(b_i)_{i\in I}$, $(c_j)_{j\in J}$ des bases resp. de U et de V. Alors $(b_i \otimes c_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base du $\mathbb{k}$-ev $U\otimes V$.

Idée de dém. : Par définition de "base", on a des décomposition :

$$U = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{k} b_i \quad \text{et} \quad V = \bigoplus_{j\in J} \mathbb{k} c_j .$$

Pour tout $i\in I$, on pose $B_i = \mathbb{k}$. Alors la décomp. ci-dessus détermine un isom. de $\mathbb{k}$-ev.

$$\bigoplus_{i\in I} B_i \xrightarrow{\text{iso. de } \Bbbk\text{-ev}} U$$

$$(\lambda_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} \lambda_i b_i$$

où $\lambda_i \in \Bbbk$, $\forall i \in I$

Idem pour V, en posant $C_j = \Bbbk$, $\forall j \in J$. La Rmq 2.5 assure qu'il existe un iso. $\left(\bigoplus B_i\right)_{i\in I} \otimes \left(\bigoplus_{j\in J} C_j\right)$ et $\bigoplus_{(i,j)\in I\times J} B_i \otimes C_j$.

D'autre part, $\forall (i,j) \in I \times J$, $B_i \otimes C_j = \Bbbk \otimes \Bbbk \simeq \Bbbk$. C'est à partir de ces données qu'on peut démontrer la Proposition. □

<u>Corollaire 2.7</u> Si U et V sont des e.v. de dimension finie, $U \otimes V$ est aussi de dim finie et $\dim_{\Bbbk}(U\otimes V) = (\dim_{\Bbbk} U)(\dim_{\Bbbk} V)$.

<u>Dém.</u> : Csq immédiate de la Prop. 2.6.

On considère deux e.v. V et W.

On note V^* le dual de V ; càd que $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$.

Soient $\xi \in V^*$ et $w \in W$. L'application
$$e_{\xi, w} : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto \xi(v)\, w$$
est une application linéaire. On note au passage que, si w et ξ sont non nuls, elle est de rang 1 : $\mathrm{Im}(e_{\xi,w}) = \mathbb{k} w$.

De plus, l'application
$$\varphi : V^* \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$$
$$(\xi, w) \longmapsto e_{\xi, w}$$
est bilinéaire. Elle induit donc une application linéaire :
$$\overline{\varphi} : V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W).$$

<u>Proposition 2.9</u> : Si V et W sont de dim. finie, alors $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme.

<u>Dém. :</u> Rappel : soit $(b_1, \dots, b_m)$ une base de V et $(c_1, \dots, c_n)$ une base de W. On note $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ la <u>base de V^*</u> duale de V.
Autrement dit : $\forall\, i, j \in \{1, \dots, m\}$ $\xi_i(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$

D'après la proposition 2.6, l'ensemble $(\xi_i \otimes c_j)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ est une base de $V^* \otimes W$.

D'autre part, pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le m$, on note f_{ij} l'unique élt de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ tq $f_{ij}(b_k) = \delta_{jk}\, c_i$, $1 \le k \le m$. Ainsi, f_{ij} est l'appl. lin. de V ds W tq

$$E_{ij} = \mathrm{Mat}_{(b_i),(c_j)}(f_{ij}) = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} & 0 & & \vdots & & 0 & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & 0 & & \vdots & & 0 & \end{pmatrix} \\ \underset{\longleftarrow\ m\ \longrightarrow}{j} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ i \quad n \\ \downarrow \end{array}$$

En fait, il est clair que $(E_{ij})_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m}$ est une base de $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{k})$.
Il s'ensuit, par isomorphisme, que $(f_{ij})_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m}$ est une base du $\mathbb{k}$-ev. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$.

Il est facile de vérifier que, pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $\overline{\varphi}(\delta_i \otimes e_j) = f_{ij}$. Donc $\overline{\varphi}$ envoie une base de $V^* \otimes W$ sur une base de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ donc $\overline{\varphi}$ est un iso. de $\mathbb{k}$-ev. $\blacksquare$

Lien avec la théorie des rép.

Soit G un gpe fini et (V, ρ), (W, τ) deux rep. de G de dimension finie. On sait que (V^*, ρ^*) est une rep. de G et donc que $(V^* \otimes W, \rho^* \otimes \tau)$ en est aussi une. On sait aussi que $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W), \mu)$ est une rep. de G (cf. Prop. 2.5 du chap. 1) où

$$\begin{aligned} \mu : G &\longrightarrow GL(\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)) \\ g &\longmapsto (\phi \mapsto \tau(g) \circ \phi \circ \rho(g)^{-1}). \end{aligned}$$

Alors, l'isomorphisme de $\mathbb{k}$-ev :

$$\overline{\varphi} : V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$$

est en fait un <u>iso de représentat°</u> (Vérif. en exercice).

Chapitre 2 du cours. G : gpe fini.

Rappel : si $V^{(0)}$ est une rep. de G, il existe une famille $V_1, \dots, V_k$ de représentations simples de G, des entiers $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ et un iso. de représentations

$$\phi : \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{\oplus n_i} \longrightarrow V.$$

une déc. de V en rep. simples

Dans ces conditions, on a une décomposition de V en somme directe interne de sous-rep. de V :

$$\boxed{\bigoplus_{i=1}^{k} \phi(V_i)^{\oplus n_i} = V}$$

une déc. de V en s-rep simples.

Lemme 1.9 (de Schur)

Soient V et W deux rep. simples de G et $\phi : V \longrightarrow W$ un morphisme de représentations.

1. Ou bien ϕ est un isomorphisme ou bien $\phi = 0$.
2. Si $V = W$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $\phi = \lambda \, id_V$.
3. Si V et W sont des rep. isomorphes, alors le ssev $\mathrm{Hom}(V, W)^G$ des morphismes de rep. de V ds W est de dim. 1 sur $\mathbb{C}$.

Dém.: 1. On rappelle que le noyau et l'image d'un morphisme de rep. est une sous-représentation. Considérons $\phi : V \to W$. Comme V est simple, on a deux alternatives :

·) $\boxed{\ker(\phi) = (0)}$, alors $\phi \neq 0$ et donc $\mathrm{Im}(\phi) = (0)$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(\phi) = W}$

En csq ϕ est bij.

··) $\ker(\phi) = V$. Alors $\phi = 0$.

2. Si V, W, on a : $\phi : V \to V$.

Comme $\mathbb{C}$ est alg. clos, on a que $\mathrm{Spec}(\phi) \neq \emptyset$. St $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)$. Alors $\ker(\phi - \lambda \, id_V) \neq (0)$. Mais $\phi - \lambda \, id_V$ est un morph. de rep. Donc d'après le premier point, $\phi - \lambda \, id_V = 0$.

3. A lire seul. Rappel : l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)^G$ est par déf. l'ens. des élts ϕ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ tq $\forall g \in G$, $g \cdot \phi = \phi$. Càd que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)^G$ est l'ens. des morph. de rep. de V ds W. ∎

2 Composantes isotypiques.

Rmq 2.1 Soit U une repr. de G.

1. On se donne deux décompositions de U en sommes directes de représentations simples :

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{V_i}^{\oplus m_i} \xrightarrow{\ \varphi\ } U \xleftarrow{\ \psi\ } \bigoplus_{j=1}^{\ell} \underbrace{W_j}^{\oplus n_j}.$$

où les V_i sont deux à deux non isom.
W_j " " " " .

On a donc une décomposition de U en somme directe de sous-représentations simples comme suit : chaque V_i a une image par φ ds U et ces images sont en somme directe :

$$\left[\overbrace{V_1 \oplus \cdots \oplus V_1}^{m_1} \xrightarrow{\ \varphi\ } \overbrace{\mathcal{V}_{1,1} \oplus \mathcal{V}_{1,2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_{1,m_1}}^{m_1}\right]$$

$$\underbrace{V_k \oplus \cdots \oplus V_k}_{m_k} \qquad \mathcal{V}_{k,1} \oplus \cdots\cdots \oplus \mathcal{V}_{k,m_k}$$

$$\shortparallel$$

$$U$$

On peut procéder de même avec la déc. associée à ψ. On obtient ainsi des déc. de M en sous-rep. simples :

$$M = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j_i \leq m_i}} V_{i,j_i} = \bigoplus_{\substack{1 \leq a \leq \ell \\ 1 \leq b_a \leq n_a}} W_{a,b_a}$$

Mais attent° il n'y a a priori aucune égalité entre les $V_{\cdot,\cdot}$ et les $W_{\cdot,\cdot}$.

Cependant, si au lieu de travailler avec chaque V_i et chaque W_j, on considère les composantes isotypiques de chaque décomposition, on a un lien très fort ; on peut en effet montrer que

·) $k = \ell$

··) il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ tq V_i et $W_{\sigma(i)}$ soient isomorphes et alors : $m_i = n_{\sigma(i)}$.

···) On a :

$$\varphi\left(V_i^{\oplus m_i}\right) = \varphi\left(W_{\sigma(i)}^{\oplus n_{\sigma(i)}}\right)$$

iso

comme rep.

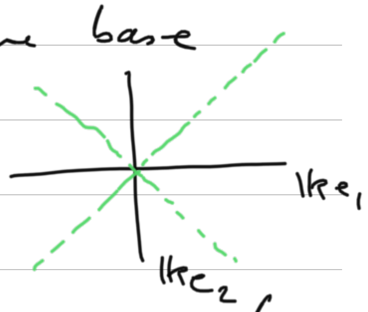
Ainsi l'image par φ de la composante isotypique $V_i^{\oplus m_i}$ attachée à la première décomposition est la même que l'image par φ de la comp. isotypique de $W_{\sigma(i)}^{\oplus m_{\sigma(i)}}$ associée à la seconde. C'est cette image, qui est donc indépendante de la déc. considérée, que l'on appelle <u>la</u> composante isotypique du type V_i de M.

<u>Illustr^{o}</u> : Si V ~~est~~ un e.v. de dim. 2 on peut toujours faire agir G sur V par :

$$\rho : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL(V) \\ g & \longmapsto & id_V \end{array} .$$

Alors : soit e_1 et e_2 deux vecteurs de V tq (e_1, e_2) soit une base

$$V = \overbrace{\underbrace{\mathbb{k}e_1}_{*} \oplus \underbrace{\mathbb{k}e_2}_{*}}^{\text{comp. isot.}}$$



est une déc. de V en sous-rep. simples.

<u>Mais</u> :

$$V = \underbrace{\underbrace{\mathbb{k}(e_1 + e_2)}_{*} \oplus \underbrace{\mathbb{k}(e_1 - e_2)}_{*}}_{\text{comp. isotypique}}$$

Ex. 2.3 Si V est une rep., V^G est la composante isotypique du type $\underbrace{\mathbb{1}_G}_{\text{rep. triviale}}$.

Chap. 3 : Caractères d'une représentation.

1. Définition et ptés élémentaires

Déf. 1.1 : Soit (V,ρ) une rep. de G. On appelle caractère de (V,ρ) l'applicat° :

$$\chi_V : G \xrightarrow{\rho} GL(V) \xrightarrow{Tr} \mathbb{C}$$

où $GL(V) \xrightarrow{Tr} \mathbb{C}$ est la trace.

Ex. 1.2 –

1. Si V est la rep. nulle, par convention $\chi_V = 0$ (en effet, par conv. la trace de $\forall$ endo. de l'e.v. nul est 0).
2. Soit (V,ρ) une rep., $\chi_{V,\rho}(e) = \dim_{\mathbb{C}}(V)$.
En particulier, si $V \neq (0)$, $\chi_{V,\rho} \neq 0$.
Donc $\chi_V = 0$ ssi $V = (0)$.
3. Le caractère de la rep. triviale est l'application cste égale à 1.

4. On considère la rep. régulière :

$$r : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}^G) \\ g & \longmapsto & (\varepsilon_h \to \varepsilon_{gh}) \end{array}$$

En particulier, si $g \neq e$, $r(g)$ admet pour matrice ds la base canonique une matrice de la forme suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(r(g)) \quad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \ddots & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \varepsilon_{gh} \\ \\ \varepsilon_h \\ \\ \\ \end{array} \\ r(g)(\varepsilon_h) & \end{array}$$

hors de la diag. cf

cf : si $g \neq e$, $h \neq gh$

$$\chi_{\mathbb{C}^G} : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ e & \longmapsto & |G| \\ \neq g & \longmapsto & 0 \end{array}$$

<u>Rmq</u> <u>1.4</u> : Soit (V, ρ) une representation.
Si g et h sont des élts de G conjugués, càd s'il existe $k \in G$ tq $h = kgk^{-1}$, alors :

$$\begin{aligned}\chi_V(h) = \mathrm{Tr}\big(\rho(h)\big) &= \mathrm{Tr}\big(\rho(kgk^{-1})\big)\\ &= \mathrm{Tr}\big(\rho(k)\rho(g)\rho(k)^{-1}\big)\\ &= \mathrm{Tr}\big(\rho(g)\cancel{\rho(k)^{-1}\rho(k)}\big)\\ &= \mathrm{Tr}\big(\rho(g)\big)\end{aligned}$$

Ainsi, χ_V est constante sur les classes de conjugaison. Les applicat° de G ds $\mathbb{C}$ cstes sur les classes de conj. sont appelées fonctions centrales. Le ss-ens des appl. de G ds $\mathbb{C}$ qui sont des fonctions centrales est noté : $\mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})$.
Ainsi

$$\mathcal{F}_c(G,\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^G$$

Les caractères sont des fonctions centrales.

<u>Rmq 1.4</u> : <u>Il est clair</u> que deux rep. isomorphes ont même caractère. Donc, si $\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(G)$ est l'ensemble des classes d'iso. de rep. de dim. finie de G, on a une application

$$\begin{aligned}\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(G) &\longrightarrow \mathcal{F}_c(G,\mathbb{C}).\\ cl(V) &\longmapsto \chi_V\end{aligned}$$

On a l'inclusion suivante :

$$\underbrace{\mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})}_{\text{ss-ev.}} \subseteq \underbrace{\mathbb{C}^G}_{\mathbb{C}\text{-ev.}}$$

On peut multiplier les élts de $\mathbb{C}^G$: si $\alpha\beta \in \mathbb{C}^G$, $\forall g \in G$, $(\alpha\beta)(g) = \alpha(g)\beta(g)$.

De plus, une fonction centrale est complètement déterminée par le choix arbitraire de l'image de chaque classe de conj. On note $c(G)$ le nbre de classes de conj. de G. Donc $\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})\right) = c(G)$.

$$\begin{array}{ccc} \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})\right) & = & c(G) \\ \wedge\!\!| & & \wedge\!\!| \\ \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^G\right) & = & |G| \end{array}$$

On va munir le $\mathbb{C}$-ev. $\mathbb{C}^G$ d'une structure d'e.v. hermitien. Considérons :

$$(-,-) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\alpha, \beta) \longrightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \alpha(g)\overline{\beta(g)}.$$

Il est facile de voir que $(-,-)$ est un produit scalaire hermitien sur le $\mathbb{C}$-ev. $\mathbb{C}^G$.

Proposition 1.6 : Si V, W des rep. de G.

1. $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$
2. $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \chi_W$
3. $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$ $\left(\overline{\chi_V} : G \longrightarrow \mathbb{C},\ g \mapsto \overline{\chi_V(g)}\right)$.

Dém. : Considérer sur $V\otimes W$ la base des $e_i \otimes f_j$, où $(e_i)_{1\leq i\leq m}$, $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ sont des bases resp. de V et W.

Considérer sur V^* la base duale d'une base bien choisie de V. $\blacksquare$

2. Orthogonalité des caractères irréductibles.

On rappelle que $\left(\mathbb{C}^G, (-,-)\right)$ est un esp. hermitien et donc, par restriction du p.s., $\mathcal{F}_c(G, \mathbb{C})$ est un espace hermitien.

Définition 2.1 : Soit (V, ρ) une repr.. On appelle opérateur de Reynolds de (V,ρ) l'endo.

$$\varphi_V = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g) : V \longrightarrow V$$

Ex. 2.2. Il est facile de mq $\varphi_V : V \longrightarrow V$ est un morphisme de représentation.

Proposition 2.3 : L'opérateur de Reynolds de V est un projecteur sur V^G.

Dém. : Il est facile de vérifier que $V^G = \mathrm{Im}(\varphi_V)$.
Il s'ensuit que $\varphi_V^2 = \varphi_V$. $\boxtimes$

Corollaire 2.4 : Si (V, ρ) une repr., φ_V son op. de Reynolds et m la multiplicité de V de la repr. triviale, càd $m = \dim(V^G)$.
Alors,

$$m = \dim_{\mathbb{C}}(V^G) = \mathrm{Tr}(\varphi_V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{Tr}(\rho(g))$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g).$$

déf. de m

Tr. est lin.

déf. de caractère.

Dém. : Comme φ_V est un project., sa trace est la dim. de son image.

Rmq 2.5 : Si V, W deux représentations de G.
Alors : (χ_V, χ_W) est la dim. de l'ev. des morphismes de rep. de V. ds W càd de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G$.

$$\overline{(\chi_V, \chi_W)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}\, \chi_W(g)$$

déf. du p.s.

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \underbrace{\chi_{V^*}(g)\, \chi_W(g)}$$

Prop. 1.6.

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} (\chi_{V^*} \chi_W)(g)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_{V^* \otimes W}(g)$$

cf : l'iso. de rep. $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)}(g)$$

$$= \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)^G \right)$$

cf coroll. 2.4.