$\boxed{\text{Exposé du 25 mars 2021}}$

Chapitre 3 : Caractères d'une représentat.

- Si (V, ρ) est une rep., on lui associe son caractère $\chi_V : G \xrightarrow{\rho} GL(V) \xrightarrow{Tr} \mathbb{C}$ qui est un elt de la $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{C}^G$.
- En fait les caractères st des elts du ssev $\mathcal{F}_c(G, \mathbb{C})$, de plus deux rep. iso. ont m̂ caract.
- $\chi : \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathcal{F}_c(G, \mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^G$

- L'appl. :
$$\begin{aligned} \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)} \end{aligned}$$

munit $\mathbb{C}^G$ (et dc $\mathcal{F}_c(G, \mathbb{C})$) d'une structure d'e.v. hermitien.

- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$
- $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$
- $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$

- $(V, \rho) \rightsquigarrow$ op. de Reynolds $\varphi : V \longrightarrow V$ morphisme de rep. tq $\varphi^2 = \varphi$.
  - $\dim(V^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$.
- $\left(\chi_V, \chi_W\right) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G}_{\text{morphismes de rep.}} \right)$

Théorème 2.6 Orthogonalité des caractères irréd.
1. Si V, W deux rep. simples de G, alors

$$(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 0 & \text{si } V \not\simeq W \\ 1 & \text{si } V \simeq W \end{cases}$$

En particulier, si $V \not\simeq W$, $\chi_V \neq \chi_W$.
2. L'ensemble des caractères irréductible est une famille orthonormale, donc une famille libre. En particulier, l'ens. des caractères irréductibles est fini de cardinal majoré par $c(G)$.
3. Il n'existe, à isomorphisme près, qu'un nbre fini de représentat° simples et ce nbre est majoré par $c(G)$.

dém. : 1. C'est une csq du Lemme de Schur et du fait que $(\chi_V, \chi_W) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)^G)$.
2. Rappel : $\dim(\mathcal{F}_c(G, \mathbb{C})) = c(G)$. Le reste est clair.
3. Clair.

Corollaire 2.7 $\chi : \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathcal{F}_c(G, \mathbb{C})$
$(V,\rho) \longmapsto \chi_V$.
Est une application injective, dont l'image est $\mathrm{Im}(\chi) = \bigoplus_{V \text{ irréd.}} \mathbb{N}\chi_V$.

Dém. : Si $\overset{(0)}{\#}$ V une rep. de G, alors par semi-simplicité, il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $V_1, \dots, V_k$ des rep. simples 2 à 2 non iso. et des entiers $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ tq

$$V \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{\oplus a_i} . \qquad (\nabla)$$

Donc : $\boxed{\chi_V = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{V_i} .}$ $\qquad (*)$

D'où $\mathrm{Im}(\chi) = \bigoplus_{V \text{ simples}} \mathbb{N} \chi_V$. Comme de plus l'ensemble des caract. irréd. est une famille libre, $\underline{\chi \text{ est injective}}$. ∎

Corollaire 2.8 Si V et W deux rep. avec W simple alors la multiplicité de W ds V est (χ_V, χ_W).

dém : utiliser la formule $(*)$ et l'orthog. des caractères irréd. ∎

Corollaire 2.9 Si V est une rep. de G, alors V est simple ssi $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

dém. : On reprend $(*)$: $(\chi_V, \chi_V) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2$. ∎

Prop. 2.10 : Si V une rep. simple de G, alors la mult. de V ds la rep. régulière est la dimension de V. En particulier la rep. rég. contient toutes repr. simples de G.

Dém. : D'après 2.8, la mult. de V ds $\mathbb{C}^G$ est

$$(\chi_{\mathbb{C}^G}, \chi_V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathbb{C}^G}(g) \overline{\chi_V(g)}$$

$$= \frac{1}{|G|} |G| \overline{\chi_V(e)}$$

$$= \chi_V(e)$$

$$= \dim_{\mathbb{C}}(V). \qquad \blacksquare$$

3. La base des caractères irréductibles.

On sait déjà que l'ens. des caract. irréductibles est une famille libre de $\mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})$. On va montrer qu'en fait c'est une base. Pour cela, on va mq, si $\alpha \in \mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})$, alors α est orthogonal à tous les caractères irréd. ssi $\alpha = 0$. On aura ainsi mq

$$\left(\mathrm{Vect}\{\chi_V,\ V \text{ irréd.}\}\right)^{\perp} = \{0\}.$$

Soit $\alpha : G \to \mathbb{C}$ qcq. À toute représentation (V, ρ) de G, on peut associer l'endo.

$$\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g \in G} \alpha(g)\, \rho(g) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V).$$

Note : si $\alpha : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \frac{1}{|G|}$, $\varphi_{\alpha,V} = \varphi_V$.

<u>Rmq 3.1</u> : Soit $\alpha : G \to \mathbb{C}$, quelconque.
On a : $\mathrm{Tr}\left(\varphi_{\alpha,V}\right) = |G| \left(\alpha, \chi_V^*\right)$.

<u>Prop. 3.2</u> : Soit $\alpha : G \to \mathbb{C}$.
(i) $\alpha \in \mathcal{F}_c(G, \mathbb{C})$;
(ii) pour toute rep. (V, ρ), $\varphi_{\alpha,V}$ est un morph. de rep.
(iii) $\varphi_{\alpha, \mathbb{C}^G}$ est un morph. de rep.

<u>Dém.</u> : (i) $\Rightarrow$ (ii) Clair (Π dém que pour l'op. de Reynolds)
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i) cf poly. ∎

<u>Cor. 3.3</u> Soit $\alpha \in \mathcal{F}_c(G, \mathbb{C})$. Si α est orthog. à tout caractère irréductible, alors $\alpha = 0$.

Dém. : Soit V une rep. simple de G et soit $\varphi_{\alpha,V} : V \longrightarrow V$, $\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g\in G} \alpha(g)\,\rho(g)$.

D'après la Prop. 3-2, $\varphi_{\alpha,V}$ est un morphisme de représentat° et pcq, d'après le lemme de Schur, c'est une homothétie : $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi_{\alpha,V} = \lambda\, id_V$. D'après la Rmq 3.1, on a donc

$$\lambda \dim(V) = \mathrm{Tr}\left(\varphi_{\alpha,V}\right) = |G|\left(\alpha, \chi_{V^*}\right).$$

Comme V est simple, V^* l'est aussi, et donc $(\alpha, \chi_{V^*}) = 0$. Il s'ensuit que $\lambda = 0$. Donc $\varphi_{\alpha,V} = 0$.

Ainsi : $$\sum_{g\in G} \alpha(g)\,\rho(g) = 0.$$

Il s'ensuit que $$\boxed{\sum_{g\in G} \alpha(g)\, r(g) = 0.}$$

En particulier, appliqué à ε_e, on trouve que :

$$\boxed{0 = \sum_{g\in G} \alpha(g)\, r(g)(\varepsilon_e) = \sum_{g\in G} \alpha(g)\, \varepsilon_g.}$$

Comme $\{\varepsilon_g,\ g\in G\}$ est libre, il vient que $\alpha(g) = 0$, $\forall g \in G$. ∎

<u>Corollaire 3.4</u> L'ensemble des caract. irréductibles de G est une <u>base</u> de $\mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})$. Il existe exactement $c(G)$ rep. simples deux à deux non isomorphes.

<u>Dém :</u> $\chi : \overline{\mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(G)} \longrightarrow \mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})$

$$(V,\rho) \longmapsto \chi_V.$$

(*)

On sait que $\mathcal{L}$ est une famille libre de $\mathcal{F}_c(G,V)$. Soit $\mathcal{J}$ le sev de $\mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})$ qu'elle eng. Le coroll. 3.3 montre que $\mathcal{J}^{\perp} = \{0\}$! Donc $\mathcal{J} = \mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})$. Donc $\{\chi_V,\ V \text{ simple}\}$ est de cardinal $c(G) = \dim(\mathcal{F}_c(G,\mathbb{C}))$. Comme $\mathcal{L}$ est en bij. avec l'ens. des classes d'iso de rep. simples, il existe $c(G)$ rep. simples 2 à 2 non iso.

(*) On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des caractères d'une famille de représentants (deux-à-deux non iso) des classes d'iso. de rep. simples. ∎

<u>Rmq 3.5</u> : En particulier, $\chi : \mathrm{rep}_{\mathbb{C}}(G) \to \mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})$ est injective, et $\mathrm{Im}(\chi)$ <u>engendre</u> $\mathcal{F}_c(G,\mathbb{C})$.

Chapitre 4 : Exemples

1. Les groupes abéliens.

1.1 Quelques résultats généraux

On a déjà vu que les rep. simples des gpes abéliens finis sont toutes de dimension 1.

Théorème 1.1.1 : Soit G un gpe fini.

(i) G est abélien ;

$\Updownarrow$

(ii) toute rep. irréductible de G est de dim. 1.

Dém. : Soit n le nbre de classes de conj. de G. On note $V_1, \dots, V_n$ des rep. simples de G deux-à-deux non isomorphes. D'après le chap. 3, il existe de telles rep. et toute rep. simple est iso. à l'une d'elle. Posons $d_i = \dim(V_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors on a :

$$\mathbb{C}^G \cong \bigoplus_{i=1}^{n} V_i^{\oplus d_i}.$$

On a donc $\boxed{|G| = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 .}$

G est abélien ssi $|G|$ est le nbre de classes de conj. ssi $|G| = n$. càd ssi $d_i = 1$ $\forall i$ $\blacksquare$

__Corollaire 1.1.2__ Soit G un gpe fini. Si H est un sous-gpe commutatif de G, alors la dimension de toute repr. simple de G est majorée par $[G : H]$.

__Dém. :__ Soit (V, ρ) une rep. irréductible de G. On a une rep. $H \overset{\subseteq}{\hookrightarrow} G \xrightarrow{\rho} GL(V)$ de H ds V. Comme H est comm. et d'après le théorème de semi-simplicité, il existe une ss rep W de H ds V, de dim 1. On note U le ssev de W engendré par les droites vectorielles $\rho(g)(W)$, $g \in G$.

C.à.d
$$U = \sum_{g \in G} \rho(g)(W).$$

Par construction, U est une ss rep de V pour l'action de G. Donc, comme V est simple (comme rep. de G), on a :

$$V = \sum_{g \in G} \rho(g)(W).$$

Obs. : soit $g \in G$, $h \in H$, on a $\rho(gh)(W) = \rho(g)(W)$. Donc, si g_1 et g_2 st ds la m̂ classe à gauche modulo H, c.à.d si $\exists h \in H /\ g_1 = g_2 h$, alors $\rho(g_1)(W) = \rho(g_2)(W)$.

Donc, si l'on note $g_1, \ldots, g_t$ une famille de rep. des classes à gauche de G modulo H, on a :

$$V = \sum_{i=1}^{t} \underbrace{\rho(g_i)(W)}_{\text{droites}}.$$

Donc $\dim(V) \leq t = [G:H]$. ■

<u>Lien entre G et $G/D(G)$</u> :

Si (V,ρ) est une rep. de $G/D(G)$, alors elle induit par $G \xrightarrow{\pi} G/D(G) \xrightarrow{\rho} GL(V)$ une rep. de G. De plus (V,ρ) est simple ssi $(V, \rho\circ\pi)$ est simple.

Récap. Si (V,α) est une repr. de dim. 1 de G, elle induit une rep. de $G/D(G)$. En effet, comme V est de dim 1, $GL(V)$ est comm. donc $D(G) \subseteq \ker(\alpha)$ d'où une factorisat° comme suit :

$$\begin{tikzcd} D(G) \subseteq G \arrow[r, two heads] \arrow[dr, bend right, "\alpha"'] & G/D(G) \arrow[d, "\overline{\alpha}"] \\ & GL(V) \end{tikzcd}$$

Proposition 1.1.3 :

1. Si (V,ρ) est une rep. simple de $G/D(G)$, $(V, \rho\circ\pi)$ est une rep. simple de G.
2. St (V,ρ) et (W,σ) deux rep. de $G/D(G)$, alors (V,ρ) est iso. à (W,σ) ssi $(V,\rho\circ\pi)$ est iso. à $(W,\sigma\circ\pi)$ comme rep. de G.
3. L'ensemble des classes d'isom. de rep. de dim. 1 de G est en bijection avec l'ens. des classes d'iso. de rep. de dim. 1 de $G/D(G)$. En particulier, le nbre de classes d'iso. de rep. de dim 1 de G est $[G : D(G)]$.

1.2 Rep. irréd. des gpes abéliens finis.

St G un gpe et $\hat{G}$ son dual, on a vu (chap. 1) que l'ens. des classes d'iso. de rep. de dim. 1 est en bijectᵒ avec $\hat{G}$.

Si de plus G est abélien, on a donc une bij. entre $\hat{G}$ et l'ens. des classes d'iso. de rep simples de G.
Cet isomorphisme envoie $\chi\in\hat{G}$ sur la classe d'iso. de la rep.

$$\begin{aligned}\rho_\chi : G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}) \\ g &\longmapsto \chi(g)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\end{aligned}.$$

<u>Rappel :</u> tout gpe abélien fini est isomorphe à un produit direct de gpes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On connaît les caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (cf chapitre 1) ; on sait construire les caractères d'un produit direct à partir de ceux de chaque facteur (cf. chap. 1 ; $\widehat{G \times H} \simeq \hat{G} \times \hat{H}$). Donc, avec le rappel ci-dessus, on sait construire les caract de H gpe abélien fini et donc les rep. simples de tout gpe abélien fini.

<u>Ex.</u> Groupes abéliens de cardinal 4

	1	1	1	1
$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
ϕ_0	1	1	1	1
ϕ_1	1	i	-1	$-i$
ϕ_2	1	-1	1	-1
ϕ_3	1	$-i$	-1	i

	1	1	1	1
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$
(ϕ_0, ϕ_0)	1	1	1	1
(ϕ_1, ϕ_0)	1	-1	1	-1
(ϕ_0, ϕ_1)	1	1	-1	-1
(ϕ_1, ϕ_1)	1	-1	-1	1

2. Le gpe symétrique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on s'intéresse aux rep. simples de $\mathfrak{S}_n$.

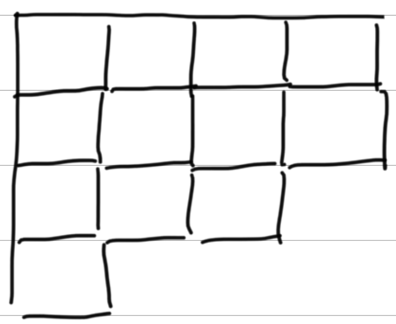
Tout élt de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit de façon "essentiellement" unique comme produit de cycles à supports disjoints.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k$ où les σ_i sont des cycles à supp. disjoints dont on note c_i le cardinal du support. On a donc $\boxed{c_1 + \dots + c_k = n.}$ (On supp. $c_1 \geq c_2 \geq \dots$).

Ex : $\sigma = \underbrace{(1,7,8,11) \circ (2,3,5,9)}_{4\text{-cycles}} \circ \underbrace{(4,6,10)}_{3\text{-cycle}} \circ \underbrace{(12)}_{1\text{-cycle}}$

$\in \mathfrak{S}_{12}$

On représente le diag. de Young associé à σ comme suit :



cf : il y a $\underline{\underline{2}}$ 4-cycles ds la déc. de σ

Deux permutations st ds la m̂ classe de conj. ssi elles ont le m̂ diag. de Young.

2.1 Quelques ex. de rep. du gpe sym.

Les rep. de dim. 1 de $\mathfrak{S}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Les rep. de dim 1. de $\mathfrak{S}_n$ s'obtiennent à partir de celle de son abelianisé : $\mathfrak{S}_n / \mathfrak{A}_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Or $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ a deux rep. simples (car $c(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 2$) donc $\mathfrak{S}_n$ a deux rep de dim. 1 (à iso. près) cf. : la corresp. bij. de la Prop. 1.1.3.
Or, on connait deux rep. non iso. de dim. 1 de $\mathfrak{S}_n$:

$$\mathbb{1} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}) \\ \sigma & \longmapsto & 1 . id_{\mathbb{C}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \sigma & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$sgn : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}) \\ \sigma & \longmapsto & sgn(\sigma) . id_{\mathbb{C}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \sigma & \longmapsto & sgn(\sigma) \end{array}$$

La représentation standard de $\mathfrak{S}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\pi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow GL(\mathbb{C}^n)$$
$$\sigma \longmapsto f_\sigma$$

où $f_\sigma : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $e_i \longmapsto e_{\sigma(i)}$.

On a vu que le ssev $D = \mathbb{C}(e_1 + \dots + e_n)$ est une sous-représentation de $(\mathbb{C}^n, \pi)$ et que l'hyperplan $V = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,/\, z_1 + \dots + z_n = 0\}$ est une ss rep de $\mathbb{C}^n$, suppl. de D :

$$\mathbb{C}^n = D \oplus V.$$

On voit facilement que la ssrep D est iso. $\mathbb{1}$.
La sous-rep. V sera appelé la ssrep. <u>standard</u>.

$\sim$