Exposé du 1er Avril 2021.

2. Le groupe sym.

2.1 Quelques ex. de rep. du gpe sym.

- Il y a deux repr. de dim. 1 de $\mathfrak{S}_n$, la triviale $\mathbb{1} : \mathfrak{S}_n \to GL(\mathbb{C})$, $\sigma \mapsto id_{\mathbb{C}}$ et la signature $sgn : \mathfrak{S}_n \to GL(\mathbb{C})$, $\sigma \mapsto sgn(\sigma) id_{\mathbb{C}}$. Elles proviennent des caractères de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathfrak{S}_n / D(\mathfrak{S}_n)$.

- La repr. standard : voir ci-dessous.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si V est une repr. de $\mathfrak{S}_n$, on a (facile à vérifier) :

$$(\chi_{V \otimes sgn}, \chi_{V \otimes sgn}) = (\chi_V, \chi_V).$$

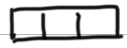
Ainsi V est simple ssi $V \otimes sgn$ est simple.
Attention : il est possible que $V \otimes sgn \simeq V$.

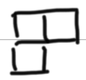
Table de caractères de $\mathfrak{S}_2$: les classes d'iso. de rep. simples sont au nombre de deux ; ce sont celles de $\mathbb{1}$, sgn.

	1	1
$\mathfrak{S}_2$	id	(12)
rep. triv.	1	1
signature	1	-1

Table de caractères de $\mathfrak{S}_3$:

- $\mathfrak{S}_3$ a trois classes de conj. :

 $\rightsquigarrow \{(123), (132)\}$

 $\rightsquigarrow \{(12), (13), (23)\}$

 $\rightsquigarrow \{id\}$

Donc $\mathfrak{S}_3$ a 3 classes d'iso. de rep. simples.

- Les rep. de dim. 1 : $\mathbb{1}$, sgn.
- On rappelle la rep. naturelle

$$\mathfrak{S}_3 \longrightarrow GL(\mathbb{C}^3)$$
$$\sigma \longrightarrow [f_\sigma : e_i \mapsto e_{\sigma(i)}]$$

La droite $\mathbb{C}(e_1+e_2+e_3)$ est une sous-rep. et il est facile de voir que l'hyperplan $V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \,/\, z_1+z_2+z_3 = 0\}$ est une ss-rep. suppl. donc $e_1 - e_2$ et $e_2 - e_3$ est une base. Cette sous-rep. de dim. 2 est la ss rep. appelée "standard" et on peut facilement calculer son caractère en écrivant les matrices de l'act° des élts de $\mathfrak{S}_3$ ds la base $\{e_1-e_2, e_2-e_3\}$. On trouve :

$$\chi_V(id) = 2 \ ; \ \chi_V((12)) = 0 \ ; \ \chi_V((123)) = -1.$$

<u>Par ex.</u>

$$(123).(e_1-e_2) = (123)e_1 - (123)e_2$$
$$= e_2 - e_3$$

$$(123).(e_2-e_3) = e_3 - e_1$$
$$= -(e_1-e_2) - (e_2-e_3)$$

Donc :

$$\mathrm{Mat}_{\{e_1-e_2, e_2-e_3\}}((123)) = \begin{array}{cc} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1-e_2 \\ e_2-e_3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} e_1-e_2 & e_2-e_3 \end{array} & \end{array}$$

Donc : $\chi_V((123)) = -1.$

Il est facile de voir que $(\chi_V, \chi_V) = 1$.
Donc V est simple.

<u>Cond.</u> :

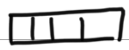
	1	3	2
$\mathfrak{S}_3$	id	(12)	(123)
$\mathbb{1}$	1	1	1
sgn	1	-1	1
V	2	0	-1

$\chi_{V\otimes \mathrm{sgn}} = \chi_V$

Donc $V \otimes \mathrm{sgn} = V$.

<u>Table de caract. de $\mathfrak{S}_4$</u> :

Classes de conj.

 $\rightsquigarrow$ 4 cycles

 $\rightsquigarrow$ 3 cycles

 $\rightsquigarrow$ produits de 2 transp. à supp. disjoints

 $\rightsquigarrow$ transp.

 $\rightsquigarrow$ id.

	1	6	8	6	3
$\mathfrak{S}_4$	id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	-1	1
V	3	1	0	-1	-1
$V \otimes \text{sgn}$	3	-1	0	1	-1
W	2	$\overset{0}{\cancel{x_1}}$	$\overset{-1}{\cancel{x_2}}$	$\overset{0}{\cancel{x_3}}$	$\overset{2}{\cancel{x_4}}$

La rep. standard V est simple (cf. ci-dessus).
La rep. $V \otimes$ sgn. n'est pas iso. à V.
Il nous manque donc une seule rep. irréd. Si W cette repr. et δ sa dim.
On sait qu'il existe un iso. de repr.

$$\underbrace{\mathbb{C}^{\mathfrak{S}_4}}_{24} \cong \underbrace{\mathbb{1}}_{1} \oplus \underbrace{\text{sgn}}_{1} \oplus \underbrace{\left(V^{\oplus 3}\right)}_{9} \oplus \underbrace{\left(V \otimes \text{sgn}\right)^{\oplus 3}}_{9} + \underbrace{W^{\oplus \delta}}_{\delta^2}.$$

Donc : $\delta = 2$.

De plus $\left(\chi_W, \chi_{\mathbb{1}}\right) = 0$ donc

$$\boxed{2 + 6x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0}$$

De m. $(\chi_W, \chi_{sgn}) = 0$ d'où une autre éq.

$$(\chi_W, \chi_V) = \quad "$$

$$(\chi_W, \chi_{V\otimes sgn}) = \quad "$$

Ceci donne 4 éq. lin. et on peut en déduire x_1, x_2, x_3, x_4.

Ici, comme une seule repr. reste à déterminer, il est plus simple de se souvenir que

$$\chi_{\mathbb{C}^{\mathfrak{S}_4}} = \chi_{\mathbb{1}} + \chi_{sgn} + 3\chi_V + 3\chi_{V\otimes sgn} + 2\chi_W.$$

$\chi_{\mathbb{C}^{\mathfrak{S}_4}}$ est connu : $id \longrightarrow 24$

$id \neq \sigma \longrightarrow 0$

2.2 La repr. standard. (Voir Ex. 1.1.7, Chap. 1).

Sit $n \in \mathbb{N}^*$.

Rep. naturelle $\pi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow GL(\mathbb{C}^n)$

$\sigma \longmapsto f_\sigma$

$$f_\sigma : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$e_i \longmapsto e_{\sigma(i)}$$

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(n)})$$

On pose $D = \mathbb{C}(e_1 + \dots + e_n)$

$$V = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n / z_1 + \dots + z_n = 0\}$$

Il est facile de voir que $\mathbb{C}^n = D \oplus V$ et que V et D sont des ss-rep. de $\mathbb{C}^n$.
On appelle V la <u>rep. standard</u> de $\mathfrak{S}_n$.
Et, il est clair que $D \simeq \mathbb{1}$ (car $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \cdot (e_1 + \dots + e_n) = e_1 + \dots$

$$\chi_{\mathbb{C}^n} = \chi_D + \chi_V = \chi_{\mathbb{1}} + \chi_V.$$

D'autre part, il est facile de voir qu'il n'y a aucun vecteur de V laissé fixe par tous les élts de $\mathfrak{S}_n$. Autrement dit : la mult. de $\mathbb{1}$ ds V est nulle, càd que :

$$\boxed{(\chi_V, \chi_{\mathbb{1}}) = 0.}$$

Il s'ensuit que $(\chi_{\mathbb{C}^n}, \chi_{\mathbb{C}^n}) = (\chi_V, \chi_V) + (\chi_{\mathbb{1}}, \chi_{\mathbb{1}})$

cf poly.

Un calcul simple mais rusé mq $(\chi_{\mathbb{C}^n}, \chi_{\mathbb{C}^n}) = 2$.
Par ailleurs, $(\chi_{\mathbb{1}}, \chi_{\mathbb{1}}) = 1$ puisque $\mathbb{1}$ est simple.
Donc $(\chi_V, \chi_V) = 1$ et posq V est simple.

2.3 Les représentations de $\mathfrak{A}_4$:

Il y a 4 classes de conj. de $\mathfrak{A}_4$. Donc il y a 4 classes d'iso. de rep. simples.

Le ss-gpe de $\mathfrak{A}_4$ $K = \{id_4, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ est isom. au gpe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De plus K est distingué. D'où un morph. surj.

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A}_4 & \longrightarrow & \mathfrak{A}_4/K & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ id & \longmapsto & K & \longmapsto & \bar{0} \\ (123) & \longmapsto & (123)K & \longmapsto & \bar{1} \\ (132) & \longmapsto & (132)K & \longmapsto & \bar{2} \end{array}$$

(*)

Rappel : Les repr. simples de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont (à iso. près) classées par les caractères complexes du gpe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et il y en a donc 3. Si l'on pose $\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$, la table des caract. de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est la suivante :

	1	1	1
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
rep. triviale	1	1	1
	1	ζ	ζ^2
	1	ζ^2	ζ

On obtient ainsi 3 rep. de dim. 1 de $\mathfrak{A}_4$ en "relevant" à $\mathfrak{A}_4$ les 3 rep. précédentes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

		1	3	4	4
	$\mathfrak{A}_4$	id	$(12)(34)$	(123)	(132)
	V_1	1	1	1	1
	V_2	1	1	j	j^2
	V_3	1	1	j^2	j
(?)	V	3	-1	0	0

On a : $\underbrace{\mathbb{C}^{\mathfrak{A}_4}}_{12} \cong \underbrace{V_1 \oplus V_2 \oplus V_3}_{3} + \underbrace{V^{\oplus d}}_{d^2}$ où $d = \dim(V)$.

On a donc $\boxed{d=3}$. De plus $\underbrace{\chi_{\mathbb{C}^{\mathfrak{A}_4}}}_{} = \underbrace{\chi_{V_1}+\chi_{V_2}+\chi_{V_3}+\chi_{V}}_{}$

En exploitant cette dernière égalité, on obtient les valeurs explicites de χ_V (ou alternativement : on peut utiliser l'orthog. de colonnes).

3 Groupes diédraux.

3.1 Déf. et premières propriétés

Rappel : soit E un e.v. euclidien. On appelle gpe orthogonal de E, noté $O(E)$, le ss-gpe de $GL(E)$ des élts $f : E \to E$ tq $\forall x, y \in E \quad (f(x), f(y)) = (x, y)$. Note : un élt f de $GL(E)$ est ds $O(E)$ ssi c'est une isométrie.

On note $SO(E)$ le ssgpe de $O(E)$ des élts de déterminant 1. Par définition, une rotation de E est un élt de $SO(E)$.

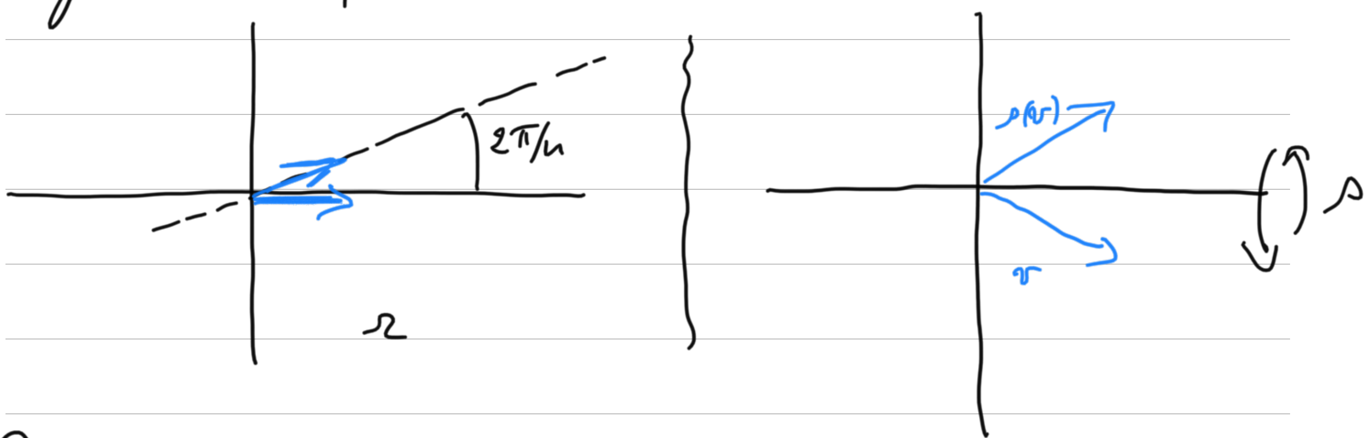
Prop. 3.1.2 : St $\mathbb{R}^2$ l'e.v. euclidien standard, orienté par la base canonique. Si r est une rotation de $\mathbb{R}^2$, il existe un réel θ, unique modulo 2π, tq la matrice ds tte base orthonormée directe de r soit

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On dit que θ est "la" mesure d'angle de r et on pose $r = r_\theta$. L'application $\mathbb{R} \to SO(E)$, $\theta \mapsto r_\theta$ est un morphisme surjectif de groupes.

Il induit un iso. de gpes $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow SO(E)$.

<u>Définition</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note r la rotation de $\mathbb{R}^2$ dont la mesure d'angle (avec l'orientation standard) est $2\pi/n$ et on note s la sym. orth. par rapport à la droite $\mathbb{R}(1,0)$. Alors, on appelle n-ième gpe diédral le ss-gpe de $O(\mathbb{R}^2)$ engendré par r et s : $D_n = \langle r, s \rangle \subseteq O(E)$.



<u>Rmq</u> :

1. La matrice de r ds la base canonique est

$$R_{2\pi/n} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$$

La matrice de s ds la b.c. est

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On montre facilement, à l'aide de ces matrices, que : ·/ r est d'ordre n,

··/ s est d'ordre 2,

···/ $srs = r^{-1}$ ou $\boxed{sr = r^{-1}s}$

Proposition 3.1.5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\forall i \in \mathbb{Z}$, $sr^is = r^{-i}$ et r^is est une réfl.

2) Le gpe D_n est fini, d'ordre $2n$ et :

$$D_n = \{\underbrace{id_{\mathbb{R}^2}, r, r^2, \dots, r^{n-1}}_{n}, \underbrace{s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s}_{n}\}.$$

3) Le ss-gpe de D_n eng. par r est distingué.

4) Si $n = 1$ ou 2, D_n est comm.

Si $n \geqslant 3$ et n impair $Z(D_n) = \{id\}$

$n \geqslant 3$ et n pair $Z(D_n) = \langle r^{n/2} \rangle$

5) $D(D_n) = \langle r^2 \rangle$.

Si n est impair, $D(D_n) = \langle r \rangle$ et $D_n/D(D_n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

n est pair, $D_n/D(D_n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proposition 3.1.6 : Soit $0 \leq h \leq n-1$. Il existe un morphisme de gpes $\mu_h : D_n \longrightarrow D_n$.

$$r \longmapsto r^h$$

$$s \longmapsto s$$

dém. cf. poly

Rmq 3.1.7 La représentation naturelle de D_n.

1.

2. On considère l'application suivante :

$$\begin{tikzcd}
\rho : D_n \arrow[r, "\subseteq"] & GL(\mathbb{R}^2) \arrow[rr, dashed, "\text{complexification}"] \arrow[d, "\simeq"] & & GL(\mathbb{C}^2) \\
& GL_2(\mathbb{R}) \arrow[rr, "\subseteq"] & & GL_2(\mathbb{C}) \arrow[u, "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

identif. via la base canonique

morphisme de gpes.

$(\mathbb{C}^2, \rho)$ est appelé repr. naturelle de D_n ds $\mathbb{C}^2$.

3. Note : la matrice de $\rho(r)$ ds la b.c. de $\mathbb{C}^2$ est

$$R = R_{2\pi/n} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$$

mais ds la base $\{e_1 - ie_2, e_1 + ie_2\}$ sa matrice est

$$\begin{pmatrix} \exp(2i\pi/n) & 0 \\ 0 & -\exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

des matrices resp. de s ds ces bases st

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prop. 3.1.8 : Soit $0 \le h \le n-1$. Les applications

$$\rho_h : D_n \xrightarrow[(*)]{\mu_h} D_n \xrightarrow[(*)]{\rho} GL(\mathbb{C}^2)$$

st des morph. de gpes et définissent des repr. de D_n ds $\mathbb{C}^2$.

3.2 Rep. irréd. de D_n, n impair $(n = 1 + 2m)$.

Lemme 3.2.1 :
1. L'ensemble $\{id_{\mathbb{R}^2}\}$ est une classe de conj.
2. Pour $0 < k \le m$, $\{r^k, r^{n-k}\}$ est une classe de conj. à deux éléments
3. L'ensemble $\{s, rs, \dots, r^{n-1}s\}$ est une classe de conj.

ie : $$\Big\{\overbrace{id, \underbrace{r, r^2, \dots\dots\dots, r^{n-1}}_{2m \text{ élts}}}^{n}, s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s\Big\}$$

Lemme 3.2.2. Le gpe diédral a $n+2$ classes d'iso. de rep. irréd, qui sont toutes de dim 1 ou 2.

Dém : Il y a $n+2$ classes de conj. de D_n donc $n+2$ classe d'iso. de rep. irréd. De plus le ssgpe $\langle r \rangle \subseteq D_n$ est comm. et d'indice 2 donc (cf. Coroll. 1.1.2, Chap. 4) la dim des rep. irréd. est majorée par 2.

Rmq 3.2.3 :

1. Comme l'abélianisé de D_n est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ D_n admet deux repr. de dim. 1 "relevées" de celles de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; ce sont :

$$\begin{array}{rcl} D_n & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}) \\ r & \longmapsto & id_{\mathbb{C}} \\ s & \longmapsto & id_{\mathbb{C}} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} D_n & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}) \\ r^i & \longmapsto & id_{\mathbb{C}} \\ r^i s & \longmapsto & -id_{\mathbb{C}} \end{array}.$$

2. La rep. ρ_0 n'est pas irréductible ; en effet $\mathbb{C}(1,0)$ et $\mathbb{C}(0,1)$ sont des ss-rep.

3. Si $0 < h < n-1$. Alors $\rho_h(r)$ a deux v.p. distinctes et les ss-esp. propres corresp. ne sont pas stable sous l'action de s. Il s'ensuit que $(\mathbb{C}^2, \rho_h)$ est irréductible.

4. Les expressions matricielles de $\rho(r)$ et $\rho(s)$ données précédemment permettent de calculer celles de $\rho_h(r)$ et $\rho_h(s)$. On en déduit les caractères des repr. $(\mathbb{C}^2, \rho_h)$, notés χ_h, pour $0 \leq h \leq n-1$. On trouve :

$$\chi_h(r^j) = 2\cos\left(\frac{2hj\pi}{n}\right)$$

$$\chi_h(r^j s) = \chi_h(s) = 0.$$

Il s'ensuit que, pour $1 \leq h \leq \frac{n-1}{2} = m$,

les χ_h st 2 à 2 distincts. Les rep. $(\mathbb{C}^2, \rho_h)$ st donc 2-à-2 non isom.

On a ainsi obtenu m représentat° de dim 2, $(\mathbb{C}^2, \rho_h)$, $1 \leq h \leq m$, qui st 2 à 2 non iso. et irréductibles.

Concl. : on a ainsi la liste exhaustive des repr. simples de D_n pour n impair.

La table des caractères est alors :

D_n	1	2	n
	id	$\{r^j, r^{n-j}\}$	$\{s, rs, \ldots, r^{n-1}s\}$
triviale	1	1	1
ψ	1	1	-1
χ_h, $1 \leq h \leq m$	2	$2\cos\left(\frac{2hj\pi}{n}\right)$	0

3.3 Rep. irréd. de D_n, n pair.

Exercice.