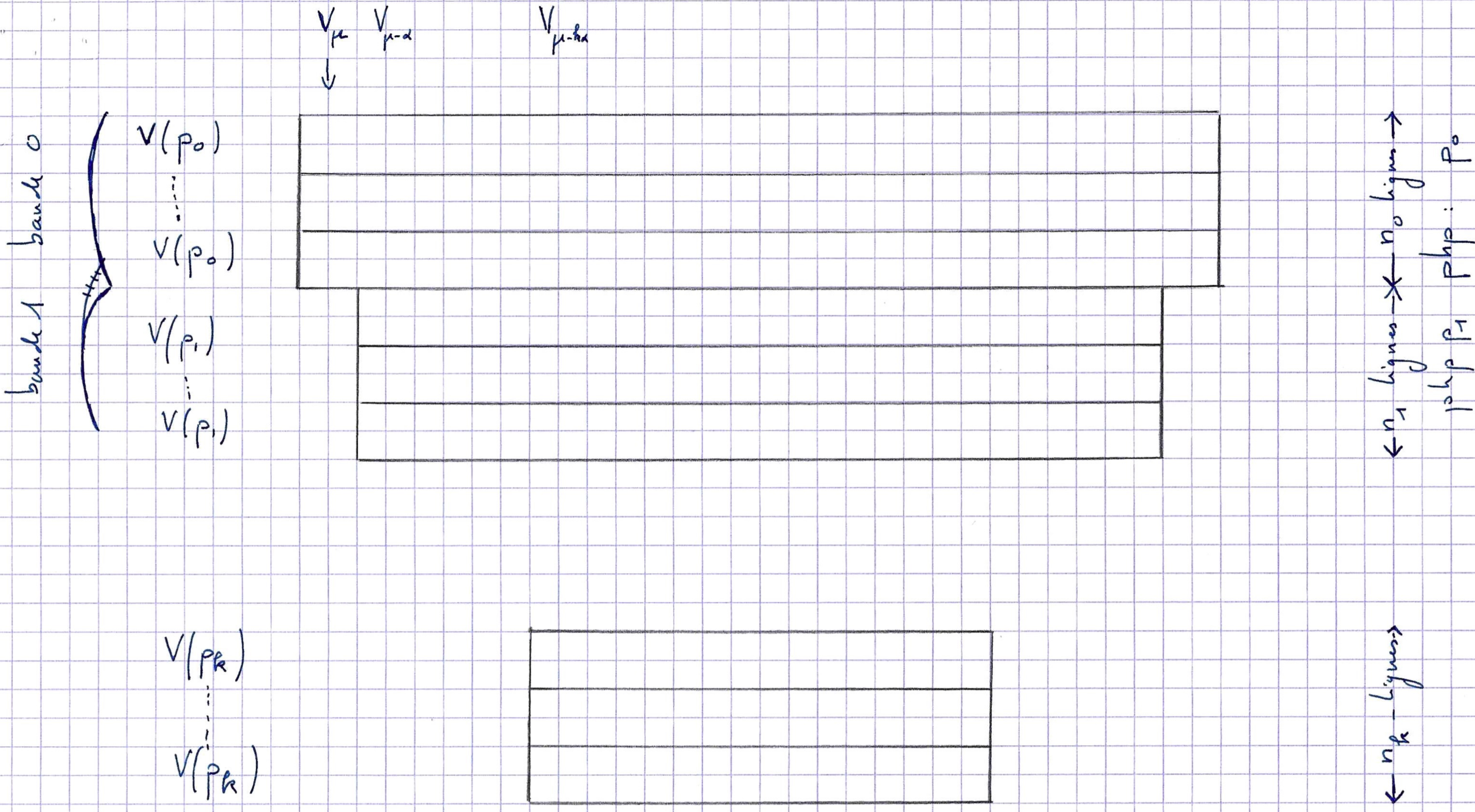
NdT 03 sept. 2021

Lecture du § 22.2 de Humphreys

Dém. de la Prop. V.3.6



Attention : les n_i peuvent être nuls ; il st indexé par des i tq $0 \leq i \leq \left[\frac{r}{2}\right]$

α- chaîne de μ : $\quad \mu,\ \mu-\alpha,\ \text{------},\ \mu-r\alpha$

- $(q=0)$
- $r = \langle \mu, \alpha \rangle$

$$W = V_\mu \oplus V_{\mu-\alpha} \oplus \cdots \oplus V_{\mu-r\alpha}$$

action de h_α sur $V_{\mu-k\alpha}$: mult. par $(\mu-k\alpha)(h_\alpha) = \langle \mu, \alpha \rangle - 2k$

pour $0 \leq k \leq r$

Donc $\quad p_0 = \langle \mu, \alpha \rangle \quad \text{----} \quad p_k = \langle \mu, \alpha \rangle - 2k$ pour $0 \leq k \leq \left[\frac{r}{2}\right]$

Si r est pair

$$\underbrace{V_\mu \ \text{-----}\ \boxed{V_{\mu-\frac{r}{2}\alpha}}}_{0 \leq k \leq \left[\frac{r}{2}\right] = \frac{r}{2}} \ \text{-----}\ V_{\mu-r\alpha}$$

colonne centrale

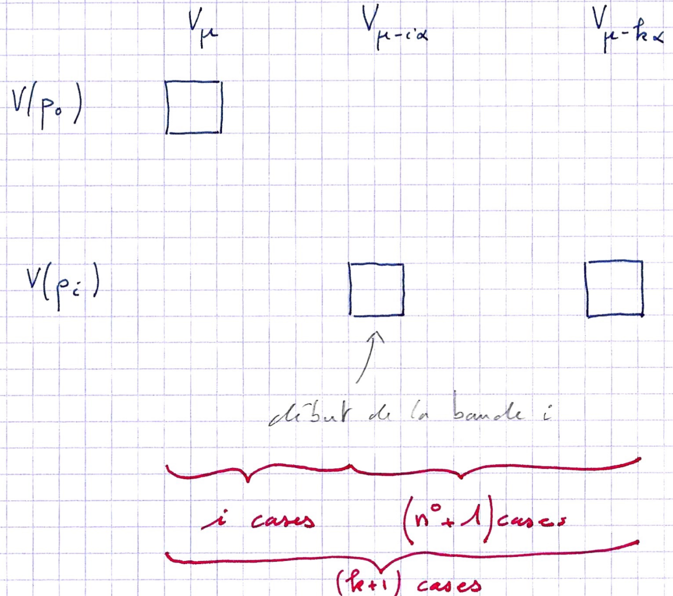
Si r est impair

$$\underbrace{V_\mu \ \text{----}\ \boxed{V_{\mu-\frac{r-1}{2}\alpha}}}_{0 \leq k \leq \left[\frac{r}{2}\right] = \frac{r-1}{2}}\boxed{V_{\mu+\frac{r+1}{2}\alpha}} \ \text{--}\ V_{\mu-r\alpha}$$

2 colonnes "centrales"

On fixe k : $0 \le k \le \left[\frac{r}{2}\right]$ et i : $0 \le i \le \left[\frac{r}{2}\right]$ et on $\tilde{c}$ une case du diag. située ds la bande i, à la verticale de $V_{\mu-k\alpha}$; donc $k \geq i$

Une telle case correspond à une droite de W (si toutefois $n_i \neq 0$ et au sous-esp. nul si $n_i = 0$). Cette droite est engendrée par un vecteur qui appartient à un S_α-ss module de plus ht poids $p_i = \langle \mu, \alpha \rangle - 2i$ et, plus précisément, avec les notation habituelle, ce vecteur a pour numéro ds la b.c. de $V(p_i)$: $k-i$. En effet, si on note n° ce numéro, on a le diag. suivant et de $i + (n°+1) = k+1$



la mult. par le scalaire

L'act° de $x_\alpha y_\alpha$ sur ce vecteur est donc $(k-i+1)(p_i-(\cancel{k}-i))$

càd $(k-i+1)(\langle\mu,\alpha\rangle - k - i)$.

Note : ds le cas extrême de la bande la plus basse et qd celle-ci est de largeur 1, on a $p_i=0$ et donc $\langle\mu,\alpha\rangle/2$ et $k=\langle\mu,\alpha\rangle/2$ de sorte que l'act° de $x_\alpha y_\alpha$ donnée ci-dessus est 0. C'est bien cohérent car, comme $V(p_i)=V(0)$, y_α agit par 0 sur le seul vecteur de base de $V(p_i)$. La formule ci-dessus prend dc bien en charge ce cas extrême.

Il découle de ce qui précède que l'act° de $x_\alpha y_\alpha$ sur V_k, $0\le k\le [\frac{r}{2}]$, est donnée par une matrice diag. avec sur la diag. les termes $(k-i+1)(\langle\mu,\alpha\rangle-k-i)$ et ce n_i fois et pour tous les i tq $0\le i\le k$.

On a donc : $\forall\ 0 \leq k \leq \left[\frac{r}{2}\right]$

$$\underbrace{\mathrm{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}}\ \phi(x_\alpha)\,\phi(y_\alpha)} = \sum_{i=0}^{k} n_i\,(k-i+1)\big(\langle \mu,\alpha\rangle - k - i\big)$$

$\hookrightarrow$ trace de la restrict° à $V_{\mu-k\alpha}$ de $\phi(x_\alpha)\,\phi(y_\alpha)$.

Donc

$$\mathrm{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}}\ \phi(x_\alpha)\,\phi(y_\alpha) = \sum_{i=0}^{k} n_i\,(k-i+1)\big(\langle \mu,\alpha\rangle - k - i\big)\,\frac{(\alpha,\alpha)}{2}.$$

Mais, $n_i = m_V(\mu - i\alpha) - m_V(\mu-(i-1)\alpha)$, $\quad 0 \leq i \leq \left[\frac{r}{2}\right]$

(où $m_V(\nu)$ est la multiplicité de V_ν ds V).

Donc $\mathrm{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}}\ \phi(x_\alpha)\,\phi(y_\alpha) = \sum_{i=0}^{k} m_V(\mu-i\alpha)(k-i+1)(\langle\mu,\alpha\rangle - k - i)$

$$- \sum_{i=0}^{k} m_V(\mu-(i-1)\alpha)(k-i+1)(\langle\mu,\alpha\rangle - k - i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} m_V(\mu-i\alpha)(k-i+1)(\langle\mu,\alpha\rangle - k - i)$$

$j = i-1$

$$- \sum_{j=-1}^{k-1} m_V(\mu-j\alpha)(k-j)(\langle\mu,\alpha\rangle - k - j - \ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{k} m_V(\mu - i\alpha)\,(k-i+1)(\langle \mu,\alpha\rangle - k - i) - \sum_{j=0}^{k} m_V(\mu - j\alpha)(k-j)(\langle \mu,\alpha\rangle - k - j - 1)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} m_V(\mu - i\alpha)\Big[(k-i+1)(\langle \mu,\alpha\rangle - k - i) - (k-i)(\langle \mu,\alpha\rangle - k - i - 1)\Big]$$

$$= \sum_{i=0}^{k} m_V(\mu - i\alpha)\,(\langle \mu,\alpha\rangle - 2i)$$

Ce qui, avec $z_\alpha = \frac{(\alpha,\alpha)}{2} y_\alpha$ se récrit :

$$\boxed{\mathrm{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}} \phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha) = \sum_{i=0}^{k} m_V(\mu - i\alpha)\,(\mu - i\alpha, \alpha),}$$

la formule ci-dessus valant pour $0 \leq k \leq \left[\frac{r}{2}\right]$.

On considère maintenant le cas où $\left[\frac{r}{2}\right] < k \leq r$ et $0 \leq i \leq r-k$.

Dans ces condition, il y a une case située sous $V_{\mu-k\alpha}$ et ds la bande i (sauf si $r_i = 0$). L'élément de la base correspondant à cette case est numéroté $k-i$ ds la base usuelle de $V(p_i)$.

On sait que $\phi(x_\alpha)\phi(y_\alpha)$ agit sur cet élt par mult. par : $(k-i+1)\big(p_i-(k-i)\big) = (k-i+1)(r-2i)$.

Par csq, on a :

$$\mathrm{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}}\ \phi(x_\alpha)\phi(y_\alpha) = \sum_{0 \leq i \leq r-k} r_i\,(k-i+1)(r-i-k)$$

~~⚠ La formule précédente (valable lorsque $0 \leq k \leq [\frac{r}{2}]$) ne s'applique pas.~~

~~Posons $k' = r-k$. On a alors $0 \leq k' \leq \frac{r}{2}$~~

Mais, pour $0 \leq i \leq r-k$ on a $0 \leq i \leq r-k \leq r/2$ donc $n_i = m_\lambda(\mu - i\alpha) - m_\lambda(\mu - (i-1)\alpha)$. Donc

$$\mathrm{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}}\left(\phi(x_\alpha)\phi(y_\alpha)\right) = \sum_{0 \leq i \leq r-k} \left[m_\lambda(\mu - i\alpha) - m_\lambda(\mu-(i-1)\alpha)\right](k-i+1)(r-i-k)$$

$$= \sum_{0 \leq i \leq r-k-1} \left[m_\lambda(\mu - i\alpha) - m_\lambda(\mu-(i-1)\alpha)\right](k-i+1)(r-i-k)$$

$$= \sum_{0 \leq i \leq r-k-1} m_\lambda(\mu - i\alpha)(k-i+1)(r-i-k)$$

On peut remplacer par $r-k-1$ car le terme pour $i = r-k-1$ est nul

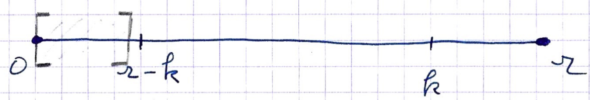
$$- \sum_{-1 \leq i \leq r-k-2} m_\lambda(\mu - i\alpha)(k-i)(r-i-1-k)$$

on peut remplacer par 0 car $m_\lambda(\mu+\alpha) = 0$

$$= \sum_{0 \leq i \leq r-k-1} m_\lambda(\mu - i\alpha)\left[(k-i+1)(r-i-k) - (k-i)(r-i-1-k)\right]$$

$$= \sum_{0 \leq i \leq r-k-1} m_\lambda(\mu - i\alpha)(r-2i)$$

La somme ci-avant est indexée sur



Mais, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$m_J(\mu - j\alpha)(r-2j) + m_J\big(\overbrace{\mu - (r-j)\alpha}^{= s_\alpha(\mu - j\alpha)}\big)\big(r - 2(r-j)\big)$$

$$= m_J(\mu - j\alpha)\left[(\cancel{r} - \cancel{2j}) + (\cancel{r} - 2(\cancel{r-j}))\right] \qquad \text{cf : } m_J(V_{s_\alpha(\nu)}) = m_J(V_\nu)$$

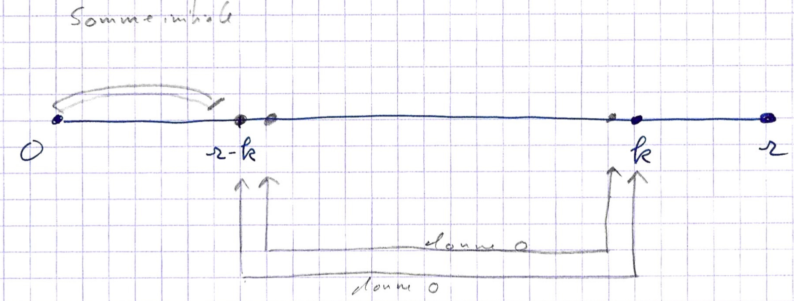
$$= m_J(\mu - j\alpha) \times 0 \qquad \text{d'après V.2.21 (version du 02/05/2}$$

$$= 0$$

Donc $$\mathrm{Tr}_{V_{\mu - k\alpha}}\big(\phi(x_\alpha)\phi(y_\alpha)\big) = \sum_{0 \leq i \leq r-k-1} m_J(\mu - i\alpha)(r - 2i)$$

$$= \sum_{0 \leq i \leq k} m_J(\mu - i\alpha)(r - 2i)$$

En effet, les termes ajoutés à la somme de la seconde expression se groupent 2 par 2 pour faire 0 suivant le schéma :



La formule pour le cas $0 \leq k \leq \left[\frac{r}{2}\right]$ s'étend donc verbatim au cas $\left[\frac{r}{2}\right] < k \leq r$. En concl :

$$\forall\ 0 \leq k \leq r \qquad \mathrm{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}}\, \phi(x_\alpha)\phi(y_\alpha) = \sum_{i=0}^{k} m_J(\mu - i\alpha) \times (r - 2i)$$

i.e.

$$\mathrm{Tr}_{V_{\mu-k\alpha}}\, \phi(x_\alpha)\, \phi(z_\alpha) = \sum_{i=0}^{k} m_J(\mu - i\alpha)\, (\mu - i\alpha, \alpha).$$