L'algèbre préprojective d'un carquois

Source : C-M. Ringel, The preprojective algebra of a quiver, in Algebras and Modules II, CMS Conference Proceedings, Vol 24, AMS, 1998, 467-480

1. Le matériel

k est un corps commutatif, k-algèbres = k-algèbres associatives, k-centrales, k-modules = modules à gauche, $\dim = \dim_k$.

Ringel utilise la convention suivante : le chemin

$\cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \xrightarrow{\beta} \cdot$ est écrit $\beta\alpha$.

$Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un carquois fini connexe

Un chemin de longueur $l \geq 1$ est une suite $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ de flèches avec $s\alpha_i = t\alpha_{i+1}$ pour $1 \leq i < l$, illustrée par

$$\cdot \xrightarrow{\alpha_l} \cdot \;\cdots\; \cdot \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdot \xrightarrow{\alpha_i} \cdot \;\cdots\; \xrightarrow{\alpha_1} \cdot$$

et écrite $\alpha_1 \cdots \alpha_l$.

L'algèbre des chemins de Q à coefficients dans k est notée kQ. On rappelle que

$$\dim kQ < \infty \iff Q \text{ est acyclique}.$$

Une représentation k-linéaire (V, x) du carquois Q est la donnée d'une famille $V = (V_i)_{i \in Q_0}$ de k-espaces vectoriels et d'une famille $x = (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$ d'applications k-linéaires $x_\alpha : V_{s\alpha} \longrightarrow V_{t\alpha}$. Avec la convention choisie, le chemin $\beta\alpha : \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \xrightarrow{\beta} \cdot$ est représenté par la composée $x_\beta \circ x_\alpha$: $\cdot \xrightarrow{x_\alpha} \cdot \xrightarrow{x_\beta} \cdot$ de $V_{s\alpha}$ vers $V_{t\beta}$.

<u>Rappel</u> : La catégorie $\mathrm{Rep}_k(Q)$ des représentations k-linéaires de Q est équivalente à la catégorie kQ-Mod.

Je vais juste décrire un foncteur $F : \mathrm{Rep}_k(Q) \longrightarrow kQ\text{-Mod}$.

À la représentation (V, x), on forme un kQ-module dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ et où l'action du chemin $\xrightarrow{\alpha_\ell} \cdots \xrightarrow{\alpha_1}$ est la composée

$$\bigoplus_{i \in Q_0} V_i \twoheadrightarrow V_{s\alpha_\ell} \xrightarrow{x_{\alpha_\ell}} V_{t\alpha_\ell = s\alpha_{\ell-1}} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{x_{\alpha_1}} V_{t\alpha_1} \hookrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$$

En particulier, l'action du chemin e_i de longueur zéro restant en i est la composée

$$\bigoplus_{j \in Q_0} V_j \twoheadrightarrow V_i \hookrightarrow \bigoplus_{j \in Q_0} V_j .$$

On montre que F est une équivalence de catégories.

<u>Définition</u> : Si (V, x) est de dimension finie, $(\dim V_i)_{i \in Q_0}$ est appelé le <u>vecteur dimension</u> de la représentation.

2. <u>L'algèbre préprojective de Q</u>

Soit $Q_1^* = \{\alpha^*, \alpha \in Q_1\}$ où $s\alpha^* = t\alpha$ et $t\alpha^* = s\alpha$:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "\alpha"] & i \arrow[l, bend left, "\alpha^*"] \end{tikzcd}$$

et soit $\overline{Q} = (Q_0, Q_1 \sqcup Q_1^*)$ le carquois double de Q.

On étend $\alpha \longmapsto \alpha^*$ en une involution de $\overline{Q}_1$ en posant $(\alpha^*)^* = \alpha$. On définit $\varepsilon_Q : \overline{Q}_1 \longrightarrow \mathbb{Z}$ par

$$\varepsilon_Q(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta \in Q_1 \\ -1 & \text{si } \beta \in Q_1^* \end{cases}$$

On pose $\rho = \sum_{\alpha \in \overline{Q}_1} \varepsilon_Q(\alpha)\, \alpha\alpha^* \in k\overline{Q}$.

On a $\rho = \sum_{i \in Q_0} \rho_i$ où $\rho_i = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t\alpha = i}} \alpha\alpha^* - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s\alpha = i}} \alpha^*\alpha$

<u>Définition</u> : L'algèbre $P_k(Q) = k\overline{Q}/(\rho)$, où (ρ) désigne l'idéal bilatère engendré par ρ, est appelée l'<u>algèbre préprojective</u> de Q.

La composée $kQ \hookrightarrow k\overline{Q} \longrightarrow k\overline{Q}/(\rho)$ est injective, donc $P_k(Q)$ contient kQ comme sous-algèbre.

Si $Q_1 \neq \emptyset$, $\overline{Q}$ n'est pas acyclique.

<u>Fait standard.</u> Notons Δ le graphe sous-jacent au carquois Q.

$\dim P_k(Q) < \infty \iff \Delta$ est Dynkin de type ADE.

<u>Exemple.</u> L'algèbre préprojective de type A_3 est la k-algèbre définie par le carquois

$$\overline{Q} : \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a_1"] & 2 \arrow[l, bend left, "a_1^*"] \arrow[r, bend left, "a_2"] & 3 \arrow[l, bend left, "a_2^*"] \end{tikzcd}$$

soumise aux relations $\rho_1 = -a_1^* a_1$, $\rho_2 = a_1 a_1^* - a_2^* a_2$, $\rho_3 = a_2 a_2^*$. Elle est de dimension 10, de base :

$e_1, e_2, e_3 ;\ a_1, a_1^*, a_2, a_2^*, a_2 a_1, a_2^* a_2, a_1^* a_2^*$.

<u>Motivation de la définition de Gelfand et Ponomarev (1979) :</u>

Si Q est acyclique, $P_k(Q)$ satisfait la <u>propriété préprojective</u> : $P_k(Q) \underset{kQ\text{-Mod}}{\simeq} \bigoplus_{M \in \mathcal{Z}} M$

où Z est un ensemble de représentants de

$\{$ classes d'isomorphisme des modules préprojectives $\}$

définis à l'aide de la translation τ

d'Auslander-Reiten

3. L'algèbre tensorielle d'un bimodule

Soient Λ un anneau et Ω un Λ-bimodule.

Définition. $T_\Lambda(\Omega) = \bigoplus_{t\geq 0} \Omega^{\otimes t}_\Lambda$ est appelé la Λ-algèbre tensorielle de Ω.

On a $\Omega^{\otimes 0}_\Lambda = \Lambda$ et $\Omega^{\otimes(t+1)}_\Lambda = \Omega^{t} \otimes_\Lambda \Omega$ pour $t \geq 0$.

Alors $T_\Lambda(\Omega)$ est un Λ-bimodule gradué.

Le produit de $a \in \Omega^{\otimes s}_\Lambda$ et $b \in \Omega^{\otimes t}_\Lambda$ dans $T_\Lambda(\Omega)$ est $a \otimes_\Lambda b \in \Omega^{\otimes(s+t)}_\Lambda$ pour $s \geq 1$ et $t \geq 1$. Lorsque $s=0$ ou $t=0$, ce produit est l'action à gauche ou à droite de Λ sur le Λ-bimodule $T_\Lambda(\Omega)$. Comme ces deux actions peuvent être différentes, $T_\Lambda(\Omega)$ est une Λ-algèbre associative pour laquelle Λ n'agit pas centralement en général, voir Exemple ci-dessous.

Exemple standard.

L'algèbre des chemins kQ peut être vue comme une algèbre tensorielle.

$\Lambda = kQ_0$ est un sous-anneau (commutatif) de kQ, de sorte que kQ est un Λ-bimodule gradué.

Prenons $\Omega = kQ_1$.

C'est un sous Λ-bimodule de kQ

<u>Remarque</u> : kQ_0 n'agit pas centralement sur kQ_1 dès qu'il existe une flèche $i \xrightarrow{\alpha} j$ où $i \neq j$, puisque $\alpha e_i = \alpha \neq 0 = e_i \alpha$.

kQ est une kQ_0-algèbre associative contenant kQ_0, de sorte que le morphisme de kQ_0-bimodules canonique $kQ_1 \hookrightarrow kQ$ se prolonge par propriété universelle en un morphisme de kQ_0-algèbres associatives

$$f : T_{kQ_0}(kQ_1) \longrightarrow kQ$$

$$\alpha_1 \underset{kQ_0}{\otimes} \cdots \underset{kQ_0}{\otimes} \alpha_\ell \longmapsto \alpha_1 \cdots \alpha_\ell .$$

<u>Affirmation</u> : ~~f est un isomorphisme.~~

En effet, l'application k-linéaire

$$g : kQ \longrightarrow T_{kQ_0}(kQ_1)$$

$$\alpha_1 \cdots \alpha_\ell \longmapsto \alpha_1 \underset{kQ_0}{\otimes} \cdots \underset{kQ_0}{\otimes} \alpha_\ell$$

est définie sur la base des chemins de Q, et c'est une application réciproque de f.

Notons que si $\overset{\alpha}{\longrightarrow} \underset{i}{\times}$ $\underset{j}{\times} \overset{\beta}{\longrightarrow}$, alors

$$\beta \underset{kQ_0}{\otimes} \alpha = \beta e_j \underset{kQ_0}{\otimes} e_i \alpha = \beta \underset{kQ_0}{\otimes} e_j e_i \alpha = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$\beta \underset{kQ_0}{\otimes} \alpha \neq 0 \text{ si } i = j$$

4. Le Théorème A

k corps commutatif et Q carquois fini connexe

On pose $D = \mathrm{Hom}_k(-,k)$. Alors $D(kQ_{kQ})$

est un kQ-module à gauche pour l'action :

si $\varphi : kQ \to k$ est k-linéaire, on pose

$$(a\cdot\varphi)(x) = \varphi(x\cdot a) \quad \text{pour tout } x \text{ et } a \text{ dans } kQ.$$

Pour tout kQ-module à gauche M, le k-e.v.

$$\mathrm{Ext}^1_{kQ}(D(kQ_{kQ}), M)$$

est un kQ-module à gauche. De plus

$$\mathrm{Ext}^1_{kQ}(D(kQ_{kQ}), {}_{kQ}kQ)$$

est un kQ-bimodule que l'on notera H.

Voir détails en Section 5.

Théorème A. Soient k un corps commutatif et Q un carquois fini connexe acyclique. Soit le kQ-bimodule

$$H = \mathrm{Ext}^1_{kQ}(D(kQ_{kQ}), {}_{kQ}kQ).$$

Alors
$$P_k(Q) \underset{kQ\text{-alg.}}{\simeq} T_{kQ}(H)$$

définition de Gelfand et Ponomarev (1979)

folklore jusqu'à Ringel (1998)

déf. de Baer-Geigle-Lenzing (1987) qui vérifie aussi la propriété projective

<u>But</u> : expliquer ~~le~~ kQ-bimodule $\textcircled{H}$ et détailler la stratégie de la preuve du Théorème A.

5. <u>Le kQ-bimodule $\textcircled{H} = \mathrm{Ext}^1_{kQ}(D(kQ_{kQ}), {}_{kQ}kQ)$</u>.

(1) Soient A une k-algèbre, M et M' des A-modules à gauche. Soit $\mathbb{P}$ une résolution projective de M, i.e. on a une suite exacte de A-modules à gauche

$$\longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $P_0, P_1, P_2, \ldots$ sont projectifs.

On a alors le complexe de cochaînes de k-ev

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_0, M') \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_A(P_1, M') \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Hom}_A(P_2, M') \longrightarrow \cdots$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ \partial_2$$

<u>Définition</u>. $\mathrm{Ext}^n_A(M, M') = H^n(\mathrm{Hom}_A(\mathbb{P}, M'), \delta)$. C'est un k-ev qui "ne dépend pas" du choix de la résolution projective $\mathbb{P}$.

Comme $0 \to \mathrm{Hom}_A(M, M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_0, M') \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_A(P_1, M')$ est exacte, on a $\mathrm{Ext}^0_A(M, M') \simeq \mathrm{Hom}_A(M, M')$.

On obtient des foncteurs $\mathrm{Ext}^n_A(M, -)$ et $\mathrm{Ext}^n_A(-, M')$ de A-Mod vers k-Mod. En particulier

$\mathrm{Ext}^1_{kQ}(D(kQ_{kQ}), {}_{kQ}kQ)$ est un k-ev.

(2) Supposons de plus que <u>M est un A-bimodule</u>, i.e. on a $(a.x).b = a.(x.b)$ pour tout $x \in M$, a, b dans A, et $\lambda . x = x . \lambda$ pour tout $\lambda \in k$ (où M est un k-bimodule

via $k \to A$, $\lambda \mapsto \lambda . 1_A$).

Alors $\mathrm{Hom}_A(M, M')$ est un A-module à gauche par :
si $\varphi : M \to M'$ est A-linéaire à gauche, on pose
$(a \cdot \varphi)(x) = \varphi(x . a)$ pour tout $a \in A$ et $x \in M$.

En effet, $(a . (b . \varphi))(x) = (b . \varphi)(x . a) = \varphi((x . a) . b)$
$= \varphi(x . (ab)) = (ab) . \varphi(x)$.

D'où un foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, M') : A\text{-Bimod} \to A\text{-Mod}$.

Soit $\mathbb{P}$ une résolution projective de M dans A-Bimod.

Alors $0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0, M') \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_A(P_1, M') \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Hom}_A(P_2, M') \to \cdots$
$\varphi \longmapsto \varphi \circ \partial_2$

est un complexe de A-Mod : $(a . \varphi) \circ \partial_n(x) = (a . \varphi)(\partial_n(x))$
$= \varphi(\partial_n(x) . a) = \varphi(\partial_n(x . a)) = a . (\varphi \circ \partial_n)(x)$. Or $\mathbb{P}$ est
une résolution projective de M dans A-Mod (exercice)
donc $\mathrm{Ext}^n_A(M, M')$ est un A-module à gauche, d'où
des foncteurs $\mathrm{Ext}^n_A(-, M') : A\text{-Bimod} \to A\text{-Mod}$ et
$\mathrm{Ext}^n_A(M, -) : A\text{-Mod} \circlearrowleft$.

Ainsi, comme kQ est un kQ-bimodule, $D(kQ) = \mathrm{Hom}_k(kQ, k)$ est un kQ-bimodule et $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(D(kQ), {}_{kQ}kQ)$
est un kQ-module à gauche.

(3) Supposons en plus de (2) que M' est un A-bimodule. Alors
$\mathrm{Hom}_A(M, M')$ est un A-module à droite par :
si $\varphi : M \to M'$ est A-linéaire à gauche, on pose

$(\varphi.a)(x) = \varphi(x).a$ pour tout $a \in A$ et $x \in M$.

En effet, $((\varphi.a).b)(x) = (\varphi.a)(x).b = (\varphi(x).a).b$
$= \varphi(x).(ab) = (\varphi.(ab))(x)$.

De sorte que $\mathrm{Hom}_A(M, M')$ devient un A-bimodule.

En effet, $((a.\varphi).b)(x) = (a.\varphi)(x).b = \varphi(x.a).b$
$= (\varphi.b)(x.a) = (a.(\varphi.b))(x)$.

D'où des endo-foncteurs $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ et $\mathrm{Hom}_A(-,M')$ de A-Bimod.

<u>Variante</u> : $\mathrm{Hom}_A(-, M') : A\text{-Mod} \to \mathrm{Mod}\text{-}A$ en oubliant ②.

Si $\mathbb{P}$ est une résolution projective de M dans A-Bimod, alors pour tout A-bimodule M',

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0, M') \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_A(P_1, M') \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Hom}_A(P_2, M') \to \cdots$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ \partial_2$$

est un complexe de A-Bimod :

$((\varphi \circ \partial_n).a)(x) = \varphi(\partial_n(x)).a = (\varphi.a)(\partial_n(x)) = ((\varphi.a)\circ\partial_n)(x)$,

de sorte que $\mathrm{Ext}^n_A(M, M')$ est un A-bimodule.

Ainsi ⓗ $:= \mathrm{Ext}^1_{kQ}(D(kQ), kQ)$ est un kQ-bimodule.

<u>Une autre application du formalisme précédent.</u>

D'après la Variante de ③ et d'après ②, on définit les endofoncteurs de kQ-Mod suivants

$$D\,\mathrm{Ext}^1_{kQ}(-, \underbrace{{}_{kQ}kQ}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}^1_{kQ}(\underbrace{D(kQ_{kQ})}, -)$$

vus comme kQ-bimodules

Proposition. Supposons Q acyclique. Sur kQ-mod, on a

$$\tau = D\,\mathrm{Ext}^1_{kQ}(-, {}_{kQ}kQ)$$

$$\tau^- = \mathrm{Ext}^1_{kQ}(D(kQ_{kQ}), -).$$

Démonstration. Comme gl. dim $kQ \leq 1$, tout objet M de kQ-mod a une résolution projective dans kQ-mod de longueur ≤ 1 : $0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$, de sorte que $0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0, A) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_A(P_1, A) \to 0$ (on pose $A = kQ$) montre que

$$\mathrm{Ext}^1_A(M, A) = \mathrm{Coker}\,\delta^0 =: \mathrm{Tr}\,M$$

$\hookrightarrow$ transposition

et donc dans kQ-mod

$$D\,\mathrm{Ext}^1_{kQ}(-, {}_{kQ}kQ) = D\,\mathrm{Tr} =: \tau$$ la translation d'Auslander-Reiten

Idem pour τ^- en utilisant une résolution injective de M dans kQ-mod.

Une digression : Comparaison des types de représentation de kQ et $P_k(Q)$.

Dans cette page : k est algébriquement clos, Q acyclique, et modules = modules de dim. finie.

Alors kQ est une k-algèbre de dimension finie.

- Théorème de Gabriel. L'algèbre kQ est de type de représentation fini (i.e. $|\{$classes d'iso de modules indécomposables$\}| < \infty$) — égal à $\frac{nh}{2}$, $n = |Q_0|$, h = nombre de Coxeter — ssi Q est Dynkin A, D, E.

En général, une k-algèbre de dimension finie (k alg. clos) est soit de type de r. fini, soit ... modéré, soit ... sauvage (théorème de trichotomie).

Th : kQ est de type de rep. modéré si et seulement si Q est Dynkin euclidien $\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{E}$.

Voir : Benson, Representations and cohomology I, CUP, 1991.

Théorème. (i) $P_k(Q)$ est de dimension finie ssi Q est Dynkin ADE (k n.n. alg. clos et Q n.n. acyclique). — la dimension est $\frac{nh(h+1)}{6}$

(ii) $P_k(Q)$ est de type de rep. fini ssi Q est Dynkin A_n pour $n \leq 4$.

(iii) $P_k(Q)$ est de type de rep. modéré ssi Q est Dynkin A_5 ou D_4.

(i) est classique et remonte à Gelfand et Ponomarev.

(ii) et (iii) sont cités pour $k = \mathbb{C}$ dans : Geiss, Leclerc, Schröer, Preprojective algebras and cluster algebras, EMS Series of Congress Reports, 2008.

→ Remarque : si Q n'est ni Dynkin, ni Dynkin euclidien, la théorie des kQ-modules de dim. finie est indécidable.

Comparaison avec les algèbres des groupes finis (k n.n. alg. clos)

La théorie des représentations d'un groupe fini G équivaut à celle de son algèbre de groupe kG.

Dans le cas classique ($\mathrm{char}(k) \nmid |G|$), toute représentation est complètement réductible, donc tout indécomposable est irréductible. De plus, si k est alg. clos, kG est de t.r. fini et $|\{$classes d'iso d'irréductibles$\}| = |\{$classes de conjugaison de $G\}|$, les classes d'isom. étant décrites par les caractères de G. Dans le cas non classique, il y a trichotomie (voir Benson).

Une autre digression : sur la propriété d'être self-injective

<u>Définition</u>. Une k-algèbre de dimension finie A est dite <u>self-injective</u> si le A-module à gauche projectif A est injectif.

<u>Proposition (facile)</u> Soit A self-injective. Pour tout A-module à g. de type fini M, les ASSE : (a) M est projectif, (b) M est injectif, (c) M^* est projectif, (d) M^* est injectif, où $M^* = \mathrm{Hom}_k(M,k)$.

<u>Exemple</u> : Q carquois fini connexe, $A = kQ$. Pour tout $i \in Q_0$,

S_i projectif $\Leftrightarrow S_i = Ae_i \Leftrightarrow$ i est un puits (sommet d'où ne part aucune flèche)

S_i injectif $\Leftrightarrow S_i = e_i A \Leftrightarrow$ i est une source (sommet où n'arrive aucune flèche).

<u>Si Q est acyclique</u>, Q a au moins un puits ou une source (exercice facile), donc il existe $i \in Q_0$ tel que S_i est projectif non injectif ou injectif non projectif, donc <u>kQ n'est pas self-injective</u> (pourvu que $Q_1 \neq \emptyset$).

Notons que le carquois connexe acyclique (mais infini) $\cdots \to \to \to \to \to \cdots$ n'a ni puits, ni source.

<u>Proposition</u>. Soit Q un carquois Dynkin ADE. Alors l'algèbre préprojective $A = P_k(Q)$ est self-injective.

<u>Idée de preuve</u> (voir Beyer–Taillez, Koszul calculus of preprojective algebras, JLMS, 2020, et références à l'intérieur de cet article) : A est <u>Frobenius</u> i.e. il existe une forme k-bilinéaire non dégénérée $(\ ,\ ) : A \times A \longrightarrow k$ compatible avec le produit de A c'àd $(ab, c) = (a, bc)$. Alors

$$\phi : {}_A A \longrightarrow ({}_A A)^*, \quad x \longmapsto (y \longmapsto (y,x))$$

est un isomorphisme de A-mod. □

<u>N.B.</u> Une algèbre de Frobenius A est dite <u>symétrique</u> si la forme $(\ ,\ )$ est symétrique. C'est le cas pour $A = P_k(Q)$ <u>ssi</u> $\mathrm{char}(k) = 2$ et Q est de type D_{2n}, E_7 ou E_8.

<u>Proposition</u>. Soient k un corps commutatif et G un groupe fini. L'algèbre kG est Frobenius symétrique. En particulier kG est self-injective.

<u>Preuve</u>. On définit la forme k-bilinéaire $(\ ,\ ) : kG \times kG \longrightarrow k$ par

$$\Big(\sum_{g\in G} \lambda_g g, \sum_{g'\in G} \mu_{g'} g'\Big) = \text{coeff de } e \text{ dans } \sum_{g,g'\in G} \lambda_g \mu_{g'} gg'.$$

Elle est clairement compatible avec le produit de A. Elle est non dégénérée : si $a = \sum_{g\in G} \lambda_g g$ est tel que $(a, g') = 0$ pour tout $g' \in G$, on remarque que $(a, g') = \lambda_{g'^{-1}}$ donc en faisant varier g', on voit que $\lambda_g = 0$ $\forall g \in G$, donc $a = 0$. Elle est symétrique car on a aussi $(g', a) = \lambda_{g'^{-1}}$. □