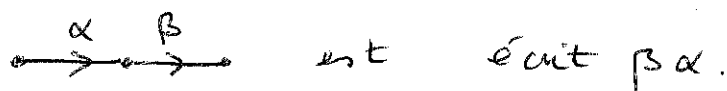


Source: C-M. Ringel, The preprojective algebra of a quiver, in Algebras and Modules II, CMS Conference Proceedings, Vol 24, AMS, 1998, 467-480

1. Le matériel

k est un corps commutatif, k -algèbres = k -algèbres associatives, k -centrales, k -modules = modules à gauche, $\dim = \dim_k$.

Ringel utilise la convention suivante : le chemin

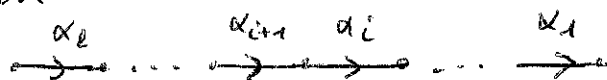


$Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un carquois fini connexe

Un chemin de longueur $l \geq 1$ est une suite

$(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ de flèches avec $s\alpha_i = t\alpha_{i+1}$ pour $1 \leq i < l$,

illustrée par



et écrite $\alpha_1 \dots \alpha_l$.

L'algèbre des chemins de Q à coefficients dans k est notée k^Q . On rappelle que

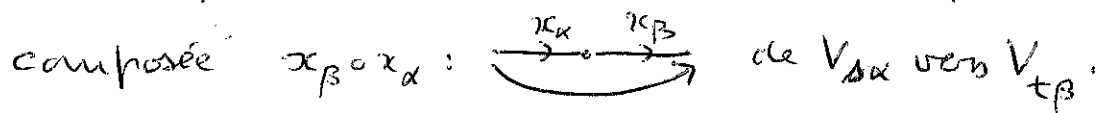
$\dim_k k^Q < \infty \iff Q$ est acyclique.

Une représentation $\overset{k\text{-linéaire}}{(V, \alpha)}$ du carquois Q est la donnée d'une famille $V = (V_i)_{i \in Q_0}$ de k -espaces vectoriels et

d'une famille $\alpha = (\alpha_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$ d'applications k -linéaires

$\alpha_\alpha : V_{s\alpha} \rightarrow V_{t\alpha}$. Avec la convention choisie, le

chemin $\beta\alpha : \xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\beta}$ est représenté par la



Rappel: La catégorie $\text{Rep}_k(Q)$ des représentations k -linéaires (2) de Q est équivalente à la catégorie $kQ\text{-Mod}$.

Je vais juste définir un foncteur $F: \text{Rep}_k(Q) \rightarrow kQ\text{-Mod}$.

À la représentation (V, α) , on forme un kQ -module dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ et où

l'action du chemin $\xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_1}$ est la composée

$$\bigoplus_{i \in Q_0} V_i \rightarrow V \xrightarrow{s\alpha_2} V \xrightarrow{t\alpha_2 = s\alpha_{l-1}} \dots \xrightarrow{s\alpha_1} V \xrightarrow{t\alpha_1} \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$$

En particulier, l'action du chemin e_i de longueur zéro restant en i est la composée

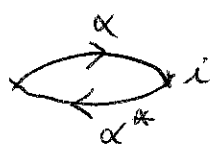
$$\bigoplus_{j \in Q_0} V_j \rightarrow V_i \hookrightarrow \bigoplus_{j \in Q_0} V_j$$

On montre que F est une équivalence de catégories.

Définition: Si (V, α) est de dimension finie, $(\dim V_i)_{i \in Q_0}$ est appelé le vecteur dimension de la représentation.

2. L'algèbre préprojective de Q

Soit $Q_1^* = \{\alpha^*, \alpha \in Q_1\}$ où $s\alpha^* = t\alpha$ et $t\alpha^* = s\alpha$:



et soit $\overline{Q} = (Q_0, Q_1 \sqcup Q_1^*)$ le carquois double de Q .

On étend $\alpha \mapsto \alpha^*$ en une involution de \overline{Q}_1 en posant

$(\alpha^*)^* = \alpha$. On définit $\varepsilon_Q: \overline{Q}_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ par

$$\varepsilon_Q(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta \in Q_1 \\ -1 & \text{si } \beta \in Q_1^* \end{cases}$$

On pose $P = \sum_{\alpha \in \overline{Q}_1} \varepsilon_Q(\alpha) \alpha \alpha^* \in \mathbb{K} \overline{Q}$. (3)

On a $P = \sum_{i \in Q_0} P_i$ où $P_i = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t\alpha = i}} \alpha \alpha^* - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ \Delta\alpha = i}} \alpha \alpha^*$

Définition : L'algèbre $T_{\mathbb{K}}(Q) = \mathbb{K} \overline{Q} / (P)$, où (P) désigne l'idéal bilatère engendré par P , est appelée l'algèbre préprojective de Q .

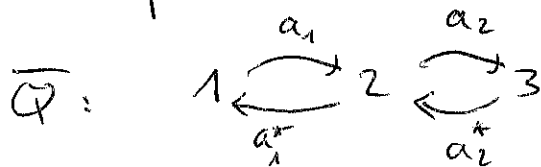
La composée $\mathbb{K}Q \hookrightarrow \mathbb{K} \overline{Q} \rightarrow \mathbb{K} \overline{Q} / (P)$ est injective, donc $T_{\mathbb{K}}(Q)$ contient $\mathbb{K}Q$ comme sous-algèbre.

Si $Q_1 \neq \emptyset$, \overline{Q} n'est pas acyclique.

Fait standard. Notons Δ le graphe sous-jacent au carquois Q .

$\dim T_{\mathbb{K}}(Q) < \infty \iff \Delta$ est Dynkin de type ADE.

Exemple. L'algèbre préprojective de type A_3 est la \mathbb{K} -algèbre définie par le carquois



soumise aux relations $P_1 = -a_1^* a_1$, $P_2 = a_1 a_1^* - a_2^* a_2$,

$P_3 = a_2 a_2^*$. Elle est de dimension 10, de base:

$e_1, e_2, e_3, a_1, a_1^*, a_2 a_2^*, a_2 a_1, a_2^* a_2, a_1^* a_2$.

Motivation de la définition de Gelfand et Ponomarev (1979):

Si Q est acyclique, $T_{\mathbb{K}}(Q)$ satisfait la propriété

préprojective : $T_{\mathbb{K}}(Q) \simeq \bigoplus_{\mathbb{K}Q\text{-Mod } M \in \mathbb{Z}} M$

où Z est un ensemble de représentants de
 classes d'isomorphisme des modules proprojectives
 défini à l'aide de la translation τ
 d'Auslander-Reiten

3. L'algèbre tensorielle d'un bimodule

Soient Λ un anneau et Ω un Λ -bimodule.

Définition. $T_\Lambda(\Omega) = \bigoplus_{t \geq 0} \Omega^{\otimes t}$ est appelé la Λ -algèbre tensorielle de Ω .

On a $\Omega^{\otimes 0} = \Lambda$ et $\Omega^{\otimes (t+1)} = \Omega \otimes_\Lambda \Omega^{\otimes t}$ pour $t \geq 0$.

Alors $T_\Lambda(\Omega)$ est un Λ -bimodule gradué.

Le produit de $a \in \Omega^{\otimes s}$ et $b \in \Omega^{\otimes t}$ dans $T_\Lambda(\Omega)$ est $a \otimes_\Lambda b \in \Omega^{\otimes (s+t)}$ pour $s \geq 1$ et $t \geq 1$. Lorsque $s=0$ ou $t=0$, ce produit est l'action à gauche ou à droite de Λ sur le Λ -bimodule $T_\Lambda(\Omega)$. Comme ces deux actions peuvent être différentes, $T_\Lambda(\Omega)$ est une Λ -algèbre associative par laquelle Λ n'agit pas centralement en général, voir Exemple ci-dessous.

Exemple standard.

L'algèbre des dérivés $k_2 Q$ peut être vue comme une algèbre tensorielle.

$\Lambda = k_2 Q_0$ est un sous-anneau (commutatif) de $k_2 Q$, de sorte que $k_2 Q$ est un Λ -bimodule gradué.

Prends $\Omega = k_2 Q_1$.

C'est un sous Λ -bimodule de kQ

(5)

Remarque: kQ_0 n'agit pas trivialement sur kQ_1

dès qu'il existe une flèche $i \xrightarrow{\alpha} x_j$ où $i \neq j$,
 puisque $\alpha e_i = \alpha \neq 0 = e_i \alpha$.

kQ est une kQ_0 -algèbre associative contenant kQ_0 ,
 de sorte que le morphisme de kQ_0 -bimodules canonique
 $kQ_1 \hookrightarrow kQ$ se prolonge par propriété universelle
 en un morphisme de kQ_0 -algèbres associatives

$$f: T_{kQ_0}(kQ_1) \longrightarrow kQ$$

$$\alpha_1 \otimes_{kQ_0} \dots \otimes_{kQ_0} \alpha_n \longmapsto \alpha_1 \dots \alpha_n$$

Affirmation: ... fonction isomorphisme.

En effet, l'application k -linéaire

$$g: kQ \longrightarrow T_{kQ_0}(kQ_1)$$

$$\alpha_1 \dots \alpha_n \longmapsto \alpha_1 \otimes_{kQ_0} \dots \otimes_{kQ_0} \alpha_n$$

est définie sur la base des chemins de Q , et c'est une
 application réciproque de f .

Nota que si $i \xrightarrow{\alpha} x_i$ $x_j \xrightarrow{\beta}$, alors

$$\beta \otimes_{kQ_0} \alpha = \beta e_j \otimes_{kQ_0} e_i \alpha = \beta \otimes_{kQ_0} e_j e_i \alpha = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$\beta \otimes_{kQ_0} \alpha \neq 0 \text{ si } i = j$$

4. Le Théorème A

(5)

k corps commutatif et Q anneau fini connexe

On pose $D = \text{Hom}_k(-, k)$. Alors $D({}_k Q)_k Q$

est un ${}_k Q$ -module à gauche par l'action:

si $\varphi: {}_k Q \rightarrow k$ est k -linéaire, on pose

$$(a \cdot \varphi)(x) = \varphi(x \cdot a) \quad \text{pour tout } x \text{ et } a \text{ dans } {}_k Q.$$

Pour tout ${}_k Q$ -module à gauche M , le k -e.v.

$$\text{Ext}_k Q^1(D({}_k Q)_k Q, M)$$

est un ${}_k Q$ -module à gauche. De plus

$$\text{Ext}_k Q^1(D({}_k Q)_k Q, {}_k Q)_k Q$$

est un ${}_k Q$ -bimodule que l'on notera (H) .

Voir détails en Section 5.

Théorème A. Soient k un corps commutatif et Q un anneau fini connexe acyclique. Soit le ${}_k Q$ -bimodule

$$(H) = \text{Ext}_k Q^1(D({}_k Q)_k Q, {}_k Q)_k Q.$$

Alors

$$P_k(Q) \simeq T_k Q(H)$$

définition de
Gelfand et Ponomarev
(1979)

déf. de Baer-Gajda-Lenzing
(1987) qui vérifie aussi
la propriété préprojective

folklore jusqu'à Ringel (1998)

But: expliquer le $k\langle Q \rangle$ -bimodule (H) et détailler la stratégie de la preuve du Théorème A.

5. Le $k\langle Q \rangle$ -bimodule $(H) = \text{Ext}_{k\langle Q \rangle}^1(D(k\langle Q \rangle_{k\langle Q \rangle}), {}_{k\langle Q \rangle}k\langle Q \rangle)$.

(1) Soient A une k -algèbre, M et M' des A -modules à gauche. Soit \mathbb{P} une résolution projective de M , i.e. on a une suite exacte de A -modules à gauche

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

où P_0, P_1, P_2, \dots sont projectifs.

On a alors le complexe de cochaînes de k -ev

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, M') \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_A(P_1, M') \xrightarrow{\delta^1} \text{Hom}_A(P_2, M') \rightarrow \cdots$$

$\varphi \longmapsto \varphi \circ \partial_2$

Définition. $\text{Ext}_A^m(M, M') = H^m(\text{Hom}_A(\mathbb{P}, M'), \delta)$. C'est un k -ev qui ne dépend pas du choix de la résolution projective \mathbb{P} .

Comme $0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, M') \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, M') \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_A(P_1, M')$ est exacte, on a $\text{Ext}_A^0(M, M') \cong \text{Hom}_A(M, M')$.

On obtient des foncteurs $\text{Ext}_A^m(M, -)$ et $\text{Ext}_A^m(-, M')$ de A -Mod vers k -Mod. En particulier

$\text{Ext}_{k\langle Q \rangle}^1(D(k\langle Q \rangle_{k\langle Q \rangle}), {}_{k\langle Q \rangle}k\langle Q \rangle)$ est un k -ev.

(2) Supposons de plus que M est un A -bimodule, i.e. on a $(a.x).b = a.(x.b)$ pour tout $x \in M, a, b$ dans A , et $\lambda.x = x.\lambda$ pour tout $\lambda \in k$ (où M est un k -bimodule

via $\ell_2 \rightarrow A, \lambda \mapsto \lambda \cdot 1_A$),

(8)

Alors $\text{Hom}_A(M, M')$ est un A -module à gauche par :
si $\varphi: M \rightarrow M'$ est A -linéaire à gauche, on pose

$$(a \cdot \varphi)(x) = \varphi(x \cdot a) \quad \text{pour tout } a \in A \text{ et } x \in M.$$

$$\begin{aligned} \text{En effet, } (a \cdot (b \cdot \varphi))(x) &= (b \cdot \varphi)(x \cdot a) = \varphi((x \cdot a) \cdot b) \\ &= \varphi(x \cdot (a \cdot b)) = (a \cdot b) \cdot \varphi(x). \end{aligned}$$

D'où un foncteur $\text{Hom}_A(-, M'): A\text{-Bimod} \rightarrow A\text{-Mod}$.

Soit \mathbb{P} une résolution projective de M dans $A\text{-Bimod}$,

$$\text{Alors } 0 \rightarrow \text{Hom}_A(\mathbb{P}_0, M') \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_A(\mathbb{P}_1, M') \xrightarrow{\delta^1} \text{Hom}_A(\mathbb{P}_2, M') \rightarrow \dots$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ \partial_2$$

$$\begin{aligned} \text{est un complexe de } A\text{-Mod: } (a \cdot \varphi) \circ \partial_m(x) &= (a \cdot \varphi)(\partial_m(x)) \\ &= \varphi(\partial_m(x) \cdot a) = \varphi(\partial_m(x \cdot a)) = a \cdot (\varphi \circ \partial_m)(x). \end{aligned}$$

Une résolution projective de M dans $A\text{-Mod}$ (exercice),

donc $\text{Ext}_A^n(M, M')$ est un A -module à gauche, d'où

des foncteurs $\text{Ext}_A^n(-, M'): A\text{-Bimod} \rightarrow A\text{-Mod}$ et

$$\text{Ext}_A^n(M, -): A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod} \quad \curvearrowright.$$

Ainsi, comme ${}_k Q$ est un ${}_k Q$ -bimodule, $D({}_k Q)$ -
 $\text{Hom}_k({}_k Q, {}_k Q)$ est un ${}_k Q$ -bimodule et $\text{Ext}_{{}_k Q}^1(D({}_k Q), {}_k Q)$
est un ${}_k Q$ -module à gauche.

③ Supposons en plus de ② que M' est un A -bimodule. Alors

$\text{Hom}_A(M, M')$ est un A -module à droite par :

si $\varphi: M \rightarrow M'$ est A -linéaire à gauche, on pose

$$(\varphi \cdot a)(x) = \varphi(x) \cdot a \quad \text{par tout } a \in A \text{ et } x \in M. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{En effet, } ((\varphi \cdot a) \cdot b)(x) &= (\varphi \cdot a)(x) \cdot b = (\varphi(x) \cdot a) \cdot b \\ &= \varphi(x) \cdot (ab) = (\varphi \cdot (ab))(x). \end{aligned}$$

De sorte que $\text{Hom}_A(M, M')$ devient un A -bimodule.

$$\begin{aligned} \text{En effet, } (a \cdot \varphi)(x) &= (a \cdot \varphi)(x) \cdot b = \varphi(x \cdot a) \cdot b \\ &= (\varphi \cdot b)(x \cdot a) = (a \cdot (\varphi \cdot b))(x). \end{aligned}$$

D'a des endo-foncteurs $\text{Hom}_A(M, -)$ et $\text{Hom}_A(-, M')$ de A -Bimod.

Variante: $\text{Hom}_A(-, M') : A\text{-Mod} \rightarrow \text{Mod-}A$ en oubliant ②.

Si \mathcal{P} est une résolution projective de M dans A -Bimod,

alors par tout A -bimodule M' ,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, M') \xrightarrow{\delta_0} \text{Hom}_A(P_1, M') \xrightarrow{\delta_1} \text{Hom}_A(P_2, M') \rightarrow \dots$$

$$\varphi \longleftarrow \varphi \circ \delta_2$$

est un complexe de A -Bimod :

$$((\varphi \circ \delta_n) \cdot a)(x) = \varphi(\delta_n(x)) \cdot a = (\varphi \cdot a)(\delta_n(x)) = ((\varphi \cdot a) \circ \delta_n)(x),$$

de sorte que $\text{Ext}_A^m(M, M')$ est un A -bimodule.

Ainsi $(H) := \text{Ext}_{kQ}^1(D(kQ), e_2 Q)$ est un kQ -bimodule.

Une autre application du formalisme précédent.

D'après la Variante de ③ et d'après ②, on définit les endo-foncteurs de kQ -Mod suivants

$$D \text{Ext}_{kQ}^1(-, e_2 Q) \quad \text{et} \quad \text{Ext}_{kQ}^1(D(kQ_{kQ}), -)$$

↙ vers comme kQ -bimodules ↘

Proposition. Supposons \mathcal{Q} acyclique. Sur $k\mathcal{Q}$ -mod, (10)

on a

$$\tau = \mathbb{D} \operatorname{Ext}_{k\mathcal{Q}}^1(-, k\mathcal{Q})$$

$$\tau^- = \operatorname{Ext}_{k\mathcal{Q}}^1(\mathbb{D}(k\mathcal{Q}_{k\mathcal{Q}}), -).$$

Démonstration. Comme $\text{gl. dim } k\mathcal{Q} \leq 1$, tout objet M

de $k\mathcal{Q}$ -mod a une résolution projective dans $k\mathcal{Q}$ -mod

de longueur ≤ 1 : $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, de sorte

$$\text{que } 0 \rightarrow \operatorname{Hom}_A(P_0, A) \xrightarrow{\delta^0} \operatorname{Hom}_A(P_1, A) \rightarrow 0$$

(car pose $A = k\mathcal{Q}$) montre que

$$\operatorname{Ext}_A^1(M, A) = \operatorname{Coker} \delta^0 =: \operatorname{Tr} M \xrightarrow{\quad} \text{transposition}$$

et donc dans $k\mathcal{Q}$ -mod

$$\mathbb{D} \operatorname{Ext}_{k\mathcal{Q}}^1(-, k\mathcal{Q}) = \mathbb{D} \operatorname{Tr} =: \tau \quad \text{la translation d' Auslander - Reiten}$$

Idem pour τ^- en utilisant une résolution injective

de M dans $k\mathcal{Q}$ -mod.

Une digression: Comparaison des types de représentation de kQ et $P_k(Q)$.
 Dans cette page, k est algébriquement clos, Q acyclique, U_6
 et module = modules de dim. finie.

Alors, kQ est une k -algèbre de dimension finie.

Théorème de Gabriel: L'algèbre kQ est de type de représentation fini (i.e. $\{f$ classes d'iso de modules indécomposables $\} < \infty$).
 Addi Q est Dynkin A, D, E. (égal à $\frac{n+1}{2}$, $n = |Q|$, k alg. clos) (k nombre Coxeter)

En général, une algèbre de dimension finie est soit de type de ∞ fini, soit ... modéré, soit ... sauvage (théorème de trichotomie).

Th: kQ est de type de rep. modéré si et seulement si Q est Dynkin euclidien $\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{E}$.

Von & Baur, Representations and cohomology I, CUP, 1991.

Théorème: (i) $P_k(Q)$ est de dimension finie si Q est

la dimension est $n \cdot h(k+1)$
6

Dynkin A D E (k m.n. alg. clos et Q m.n. acyclique).

(ii) $P_k(Q)$ est de type de rep. fini si Q est Dynkin

A_n pour $n \leq 4$.

(iii) $P_k(Q)$ est de type de rep. modéré si Q est Dynkin

A_5 ou D_4 .

(ii) est classique et remonte à Gelfand et Ponomarev.

(iii) et (ii) sont cités dans: Geiss, Leclerc, Schroer, Preprojective algebras and cluster algebras, EMS Series of Congress Reports, 2008.

Remarque: si Q n'est ni Dynkin, ni Dynkin euclidien, la théorie des kQ -modules de dim. finie est indécidable.

Comparaison avec les algèbres des groupes finis (k m.n. alg. clos) celle de

La théorie des représentations d'un groupe fini G équivaut à son algèbre de groupe kG .

Dans le cas classique ($\text{char}(k) \nmid |G|$), toute représentation est complètement réductible, donc tout indécomposable est irréductible. De plus, si k est alg. clos, kG est de type fini et $\{f$ classes d'iso d'irréductibles $\} = \{f$ classes de conjugaison de $G\}$; les classes d'iso étant décodés par les caractères de G . Dans le cas non classique, il y a trichotomie (voir Bouson).

Une autre digression: sur la propriété d'être self-injective. (6 bis)

Définition. Une k -algèbre de dimension finie A est dite self-injective si le A -module à gauche projectif A est injectif.

Proposition (facile) Soit A self-injective. Pour tout A -module à g. M , les ASSE: (a) M est projectif, (b) M est injectif; (c) M^* est projectif, (d) M^* est injectif, $\Leftrightarrow M^* \cong \text{Hom}_k(M, k)$. de type fini

Exemple: \mathbb{Q} carquois fini commexe, $A = k\mathbb{Q}$. Pour tout $i \in \mathbb{Q}_0$,
 S_i projectif $\Leftrightarrow S_i = Ae_i \Leftrightarrow i$ est un puits (sommet d'où ^{ne} part aucune flèche)
 S_i injectif $\Leftrightarrow S_i = e_i A \Leftrightarrow i$ est une source (sommet où ^{n'} arrive aucune flèche).
 Si \mathbb{Q} est acyclique, \mathbb{Q} a au moins un puits ou une source (exercice facile), donc il existe $i \in \mathbb{Q}_0$ tel que S_i est projectif non injectif ou injectif non projectif, donc $k\mathbb{Q}$ n'est pas self-injective (pourvu que $\mathbb{Q}_0 \neq \emptyset$).

Nota que le carquois commexe acyclique (mais infini) $\dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$ n'a ni puits, ni source.

Proposition. Soit \mathbb{Q} un carquois Dynkin ADE. Alors l'algèbre Frobenius $A = P_k(\mathbb{Q})$ est self-injective.

Idée de preuve (voir Bayer-Tailler, Koszul calculus of Frobenius algebras, JEMS, 2020, et références à l'intérieur de cet article): A est Frobenius i.e. il existe une forme k -bilinéaire non dégénérée $(,) : A \times A \rightarrow k$ compatible avec le produit de A c'à d $(ab, c) = (a, bc)$. Alors $\phi : A \rightarrow (A_A)^*$ est un isomorphisme de A -mod. \square
 $x \mapsto (y \mapsto (y, x))$

N.B. Une algèbre de Frobenius A est dite symétrique si la forme $(,)$ est symétrique. C'est le cas pour $A = P_k(\mathbb{Q})$ si $\text{char}(k) = 2$ et \mathbb{Q} est de type D_{2n}, E_7 ou E_8 .

Proposition. Soient k un corps commutatif et G un groupe fini. L'algèbre kG est Frobenius symétrique. En particulier kG est self-injective.

Preuve. On définit la forme k -bilinéaire $(,) : kG \times kG \rightarrow k$ par $(\sum_{g \in G} \lambda_g g, \sum_{g' \in G} \mu_{g'} g') = \text{coeff de } e \text{ dans } \sum_{g, g' \in G} \lambda_g \mu_{g'} g g'$. Elle est clairement compatible avec le produit de A . Elle est non dégénérée: si $a = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ est tel que $(a, g') = 0$ pour tout $g' \in G$, on remarque que $(a, g') = \lambda_{g'^{-1}}$ donc en faisant varier g' , on voit que $\lambda_g = 0 \forall g \in G$, donc $a = 0$. Elle est symétrique car on a aussi $(g', a) = \lambda_{g'^{-1}}$. \square