L'algèbre préprojective d'un carquois II

1. Résumé de l'exposé précédent.

k est un corps commutatif

$Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un carquois fini connexe

kQ est l'algèbre des chemins de Q

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "\alpha"] & i \arrow[l, bend left, "\alpha^*"] \end{tikzcd}$$

On pose $Q_1^* = \{\alpha^* ; \alpha \in Q_1\}$

où $s\alpha^* = t\alpha$ et $t\alpha^* = s\alpha$

$\overline{Q} = (Q_0, Q_1 \sqcup Q_1^*)$ est le carquois double de Q.

Pour $i \in Q_0$, $$\rho_i = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t\alpha = i}} \alpha\alpha^* - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s\alpha = i}} \alpha^*\alpha$$

L'algèbre préprojective de Q est

$$P_k(Q) = k\overline{Q} / (\rho_i ; i \in Q_0)$$

Rappels:

$\dim kQ < \infty \iff Q$ est acyclique

$\dim P_k(Q) < \infty \iff$ le graphe sous-jacent à Q est Dynkin de type ADE.

On avait défini le kQ-bimodule

$$\textcircled{H} = \mathrm{Ext}^1_{kQ}(D({}_{k}Q_{kQ}), {}_{kQ}kQ)$$

où $D = \mathrm{Hom}_k(-, k)$.

Le but de l'article de Ringel, The preprojective algebra of a quiver (1998), est de montrer le

Théorème A Si Q est acyclique, alors

$$P_k(Q) \underset{kQ\text{-algèbre}}{\simeq} T_{kQ}(\mathbb{H}).$$

définition de Gelfand et Ponomarev (1979)

définition de Baer-Geigle-Lenzing (1987)

Dans ce deuxième exposé, on va expliquer la stratégie utilisée par Ringel pour démontrer le Théorème A.

Autre rappel du premier exposé.

Si Q est acyclique, alors sur kQ-mod, on a

$$\tau = D\mathrm{Ext}^1_{kQ}(-, {}_{kQ}kQ).$$

En effet, kQ est une algèbre héréditaire, i.e. $\mathrm{gl.dim}\, kQ \leq 1$.
Donc tout objet M de kQ-mod a une résolution projective dans kQ-mod de longueur ≤ 1 : $0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$, de sorte que $0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0, A) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_A(P, A) \to 0$ (on pose $A = kQ$) montre que

$$\mathrm{Ext}^1_A(M, A) = \mathrm{Coker}\, \delta^0 =: \underbrace{\mathrm{Tr}\, M}_{\text{transposition de } M}$$

et donc dans kQ-mod

$$D\mathrm{Ext}^1_{kQ}(-, {}_{kQ}kQ) = D\,\mathrm{Tr} =: \tau \quad \text{translation d'Auslander-Reiten}$$

Idem, on a $\tau^- = \mathrm{Ext}^1_{kQ}(D(kQ_{kQ}), -)$.

2. Le Théorème B

<u>Notation.</u> Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soient F et G des endofoncteurs de $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}(F,G)$ est la catégorie dont les objets sont les paires (C, c) où $c : F(C) \to G(C)$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ et dont les morphismes $(C,c) \to (C',c')$ sont les morphismes $f : C \to C'$ tels que $c' \circ F(f) = G(f) \circ c$, i.e.

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C') \\ \downarrow c & \circlearrowright & \downarrow c' \\ G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C') \end{array}$$

<u>Théorème B.</u> Si Q est acyclique, les catégories $P_k(Q)$-mod et $(kQ\text{-mod})(1, \tau)$ sont isomorphes.

Ici $\mathcal{C} = kQ$-mod et $1 = Id_{\mathcal{C}}$.

$(kQ\text{-mod})(1,\tau)$ a pour objets les (M, c) où $c : M \to \tau(M)$, et pour morphismes $(M, c) \to (M', c')$ les $f : M \to M'$ kQ-linéaires à gauche tels que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow c & \circlearrowright & \downarrow c' \\ \tau(M) & \xrightarrow{\tau(f)} & \tau(M') \end{array}$$

Pour démontrer le Théorème B, on définira dans la Section 3 le foncteur de Coxeter

$$\Phi^+ : kQ\text{-Mod} \longrightarrow kQ\text{-Mod}$$
$$(V,x) \longmapsto (W,z)$$

introduit par Bernstein, Gelfand et Ponomarev en 1973 pour démontrer le théorème de Gabriel.

On aura aussi besoin du foncteur

$$T : kQ\text{-Mod} \longrightarrow kQ\text{-Mod}$$
$$(V,x) \longmapsto (V,-x)$$

On sait (théorème de Brenner-Butler-Gabriel) que

$$T\,\Phi^+\big|_{kQ\text{-mod}} = \tau .$$

Par conséquent, le Théorème B sera conséquence du

<u>Théorème B'</u>. Il y a un isomorphisme de catégories explicite $\Psi : P_{kQ}\text{-Mod} \longrightarrow (kQ\text{-Mod})(1, T\Phi^+)$

tel que

$$\begin{tikzcd}
P_{kQ}\text{-Mod} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\substack{\text{induit} \\ \text{par } kQ \subset P_k(Q) \mid \\ k\text{-alg.}}"'] & (kQ\text{-Mod})(1, T\Phi^+) \arrow[d, "\text{oubli de } c"] \\
& kQ\text{-Mod}
\end{tikzcd}$$

en restreignant Ψ à mod.

3. <u>Définition du foncteur Φ^+</u>

Comme Q est acyclique, on peut supposer que

$$Q_0 = \{1, \dots, n\}$$

tel que pour tout $\alpha \in Q_1$, on a $s\alpha > t\alpha$ (numérotation admissible). <u>Ex</u>:

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \qquad \begin{tikzcd} & & 2 \arrow[d] & & \\ 5 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 1 & 4 \arrow[l] & 6 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Construire : $\Phi^+ : k\mathcal{Q}\text{-Mod} \longrightarrow k\mathcal{Q}\text{-Mod}$.

$$(V,x) \longmapsto (W,z)$$

Soit (V,x) une représentation de $\mathcal{Q}$, i.e., la donnée d'une famille $(V_i)_{i\in\mathcal{Q}_0}$ de k-e.v. et d'une famille $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{Q}_1}$ d'applications linéaires $x_\alpha : V_{s\alpha} \longrightarrow V_{t\alpha}$.

On définit des espaces W_i par récurrence sur $i=1,\dots,n$ et des applications linéaires $y_\beta : W_{t\beta} \longrightarrow V_{s\beta}$ et $z_\beta : W_{s\beta} \longrightarrow W_{t\beta}$ tels que les suites

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow W_i \xrightarrow{(y_\alpha, z_\beta)_{\alpha\beta}} \bigoplus_{t\alpha=i} V_{s\alpha} \oplus \bigoplus_{s\beta=i} W_{t\beta} \xrightarrow{(x_\alpha, y_\beta)_{\alpha\beta}} V_i$$

soient exactes.

- Initialisation : on examine $(*)$ quand $i=1$.

Alors $\bigoplus_{s\beta=1} W_{t\beta} = 0$, d'où $\bigoplus_{t\alpha=1} V_{s\alpha} \xrightarrow{\sum x_\alpha} V_1$.

On pose $W_1 = \operatorname{Ker}\left(\sum x_\alpha\right) = \bigoplus_{t\alpha=1} \operatorname{Ker} x_\alpha$

avec $y_\alpha : W_{1=t\alpha} \longrightarrow V_{s\alpha}$ égale à $\left|\begin{array}{ll} \operatorname{Ker} x_{\alpha'} \longrightarrow 0 & \text{si } \alpha' \neq \alpha \\ \operatorname{Ker} x_\alpha \overset{\text{can}}{\hookrightarrow} V_{s\alpha} & \end{array}\right.$

- Supposons les W_j, $j<i$, les $y_\alpha : W_{t\alpha} \to V_{s\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{Q}_1$ tel que $t\alpha < i$ et les $z_\beta : W_{s\beta} \longrightarrow W_{t\beta}$ pour tout $\beta \in \mathcal{Q}_1$ tel que $s\beta < i$.

[Pour $i=2$, c'est bien l'initialisation précédente.] Alors

$$\varepsilon_i : \bigoplus_{t\alpha=i} V_{s\alpha} \oplus \bigoplus_{s\beta=i} W_{t\beta} \xrightarrow{(x_\alpha, y_\beta)_{\alpha\beta}} V_i \quad \text{est définie}$$

Posons $W_i = \operatorname{Ker} \varepsilon_i$, d'où $y_\alpha : W_i \longrightarrow V_{s\alpha}$ pour tout

$\alpha \in Q_1$ tel que $t\alpha = i$ et $z_\beta : W_i \longrightarrow W_{t\beta}$ pour tout $\beta \in Q_1$ tel que $s\beta = i$, vérifiant l'exactitude de $(*)$.

On pose $\Phi^+(V,x) = (W,z)$.

Soit maintenant $f : (V,x) \longrightarrow (V',x')$ un morphisme de kQ-Mod, i.e. $f = (f_i)_{i \in Q_0}$ avec $f_i : V_i \longrightarrow V'_i$ linéaires telles que

(1) $$f_{t\alpha} x_\alpha = x'_\alpha f_{s\alpha} \quad \text{pour tout } \alpha \in Q_1.$$

Inductivement, on construit $g_i : W_i \longrightarrow W'_i$ linéaires telles que

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & W_i & \xrightarrow{(y_\alpha, z_\beta)_{\alpha\beta}} & \bigoplus\limits_{t\alpha=i} V_{s\alpha} \oplus \bigoplus\limits_{s\beta=i} W_{t\beta} & \xrightarrow{(x_\alpha, y_\beta)_{\alpha\beta}} & V_i & \\
& \downarrow g_i & & \downarrow \oplus f_{s\alpha} \oplus \oplus g_{t\beta} & & \downarrow f_i & \\
0 \longrightarrow & W'_i & \xrightarrow{(y'_\alpha, z'_\beta)_{\alpha\beta}} & \bigoplus\limits_{t\alpha=i} V'_{s\alpha} \oplus \bigoplus\limits_{s\beta=i} W'_{t\beta} & \xrightarrow{(x'_\alpha, y'_\beta)_{\alpha\beta}} & V'_i & \text{commutent.}
\end{array}$$

Ainsi, pour tout $\alpha \in Q_1$, on a

(2) $$f_{s\alpha} y_\alpha = y'_\alpha g_{t\alpha} \quad \text{et} \quad g_{t\alpha} z_\alpha = z'_\alpha g_{s\alpha} \quad (3).$$

Les relations (3) signifient que $g = (g_i)_{i \in Q_0}$ est un morphisme $(W,z) \longrightarrow (W',z')$ de kQ-modules, et on pose $\Phi^+(f) = g$. La fonctorialité est claire.

On a donc construit les endofoncteurs

$$\Phi^+ : kQ\text{-Mod} \longrightarrow kQ\text{-Mod}$$
$$(V,x) \longmapsto (W,z)$$

et

$$T\Phi^+ : kQ\text{-Mod} \longrightarrow kQ\text{-Mod}$$
$$(V,x) \longmapsto (W,-z).$$

4. Définition de l'isomorphisme de catégories

$$\Psi : P_{k\mathcal{Q}}\text{-Mod} \longrightarrow (k\mathcal{Q}\text{-Mod})(1, T\Phi^+).$$

[démonstration du Théorème B'].

Posons $\mathcal{C} = k\mathcal{Q}\text{-Mod}$ pour simplifier.

(1) Considérons un objet de $\mathcal{C}(1, T\Phi^+)$. Il est de la forme $((V,x),\psi)$ où $\psi : (V,x) \longrightarrow (W,-z)$ est un morphisme de $k\mathcal{Q}$-modules.

On a $\psi_{t\beta} : V_{t\beta} \longrightarrow W_{t\beta}$ et $y_\beta : W_{t\beta} \longrightarrow V_{s\beta}$. On pose

$$\xi_\beta = y_\beta \psi_{t\beta} : \underset{\substack{\shortparallel \\ s\beta^*}}{V_{t\beta}} \longrightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ t\beta^*}}{V_{s\beta}}$$

d'où une représentation (V, x, ξ) de $\overline{\mathcal{Q}}$.

Montrons que (V, x, ξ) vérifie la relation ρ_i :

$$\sum_{t\alpha = i} x_\alpha \xi_\alpha - \sum_{s\beta = i} \xi_\beta x_\beta = \sum_{t\alpha=i} x_\alpha y_\alpha \psi_{t\alpha} - \sum_{s\beta = i} y_\beta \psi_{t\beta} x_\beta$$

$$= \sum_{t\alpha=i} x_\alpha y_\alpha \psi_{t\alpha} - \sum_{s\beta=i} y_\beta(-z_\beta)\psi_{s\beta}$$

$$\left(\text{à cause de } \begin{tikzcd} V_{s\beta} \arrow[r, "x_\beta"] \arrow[d, "\psi_{s\beta}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V_{t\beta} \arrow[d, "\psi_{t\beta}"] \\ W_{s\beta} \arrow[r, "-z_\beta"] & W_{t\beta} \end{tikzcd}\right) \quad (\psi \text{ est un morphisme}).$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{t\alpha=i} x_\alpha y_\alpha + \sum_{s\beta=i} y_\beta z_\beta\right)}_{0 \text{ à cause du complexe}} \psi_i$$

$$W_i \xrightarrow{(y_\alpha, z_\beta)_{\alpha\beta}} \bigoplus_{t\alpha=i} V_{s\alpha} \oplus \bigoplus_{s\beta=i} W_{t\beta} \xrightarrow{(x_\alpha, y_\beta)_{\alpha\beta}} V_i$$

D'où un objet (V, x, ξ) de $P_k(\Phi)$-Mod.

(2) Soit maintenant un morphisme $f : ((V,x),\psi) \longrightarrow ((V',x'),\psi')$ dans $\mathcal{C}(1, T\Phi^+)$. Cela signifie que le carré

$$\begin{array}{ccc} (V,x) & \xrightarrow{f} & (V',x') \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi' \\ (W,-z) & \xrightarrow{g} & (W',-z') \end{array}$$

commute, i.e. on a

(4) $\quad g_i \psi_i = \psi'_i f_i$ pour tout $i \in \Phi_0$.

Utilisant les définitions $\xi_\beta = y_\beta \psi_{t\beta}$ et $\xi'_\beta = y'_\beta \psi'_{t\beta}$ ainsi que les relations (2) et (4), on a (en plus des relations (1)) :

$$f_{s\beta} \xi_\beta = f_{s\beta} y_\beta \psi_{t\beta} = y'_\beta g_{t\beta} \psi_{t\beta} = y'_\beta \psi'_{t\beta} f_{t\beta} = \xi'_\beta f_{t\beta},$$

de sorte que $f : (V, x, \xi) \longrightarrow (V', x', \xi')$ est un morphisme de $k\overline{\Phi}$-Mod, et donc un morphisme de $P_k(\Phi)$-Mod.

D'où un foncteur

$$(k\Phi\text{-Mod})(1, T\Phi^+) \longrightarrow P_k(\Phi)\text{-Mod}$$
$$((V,x),\psi) \longmapsto (V, x, \xi).$$

(3) Réciproquement, soit (V, x, ξ) une représentation de $\overline{\Phi}$ vérifiant les relations ρ_i.

Par récurrence, on construit des applications linéaires $\psi_i : V_i \longrightarrow W_i$ telles que $\psi_{t\beta} x_\beta = -z_\beta \psi_{s\beta}$ et $\xi_\beta = y_\beta \psi_{t\beta}$ pour tout $\beta \in \Phi_1$.

Supposons que les ψ_j, $j<i$ ont été construites t.q.
$\psi_{t\beta} x_\beta = -z_\beta \psi_{s\beta}$ pour tout β avec $s\beta < i$ et $\xi_\alpha = y_\alpha \psi_{t\alpha}$ pour tout α avec $t\alpha < i$. Considérons

$$(\xi_\alpha, -\psi_{t\beta} x_\beta)_{\alpha\beta} : V_i \longrightarrow \bigoplus_{t\alpha=i} V_{s\alpha} \oplus \bigoplus_{s\beta=i} W_{t\beta} \dashrightarrow^{\varepsilon_i} V_i$$

$$(\xi_\alpha : V_{t\alpha=i} \longrightarrow V_{s\alpha} \ , \ \psi_{t\beta} x_\beta : V_{s\beta=i} \longrightarrow W_{t\beta})$$

qui composée avec ε_i donne zéro :

$$\sum_{t\alpha=i} x_\alpha \xi_\alpha - \sum_{s\beta=i} y_\beta \psi_{t\beta} x_\beta = \sum_{t\alpha=i} x_\alpha \xi_\alpha - \sum_{s\beta=i} \xi_\beta x_\beta \quad (\text{car } t\beta < i)$$

$$= 0.$$

Donc on arrive dans $\ker \varepsilon_i = W_i$, d'où $\psi_i : V_i \longrightarrow W_i$ telle que $(y_\alpha, z_\beta)_{\alpha\beta} \circ \psi_i = (\xi_\alpha, -\psi_{t\beta} x_\beta)_{\alpha\beta}$, i.e.

$\xi_\alpha = y_\alpha \psi_{t\alpha}$ dès que $t\alpha = i$

$\psi_{t\beta} x_\beta = -z_\beta \psi_{s\beta}$ dès que $s\beta = i$.

[Si $i=1$, cette construction marche avec $W_{t\beta} = 0 = \psi_{t\beta}$ pour tout β tel que $s\beta = 1$ puisque $t\beta < 1$ n'existe pas.]

Donc $\psi = (\psi_i)_{i\in Q_0}$ est un morphisme de $k Q$-modules $(V,x) \longrightarrow (W,-z)$, donc un objet de $(kQ\text{-Mod})(1, T\Phi^+)$.

Ringel vérifie soigneusement que $(V,x,\xi) \longmapsto ((V,x), \psi)$ est défini sur les flèches, d'où un foncteur

$$\Psi : P_k(Q)\text{-Mod} \longrightarrow (kQ\text{-Mod})(1, T\Phi^+)$$
$$(V,x,\xi) \longmapsto ((V,x), \psi)$$

~~inverse du précédent~~. La commutation du Th. B est claire. $\square$

5. <u>Déduire le Théorème A :</u> $P_k(Q) \underset{kQ\text{-alg.}}{\simeq} T_{kQ}(\Theta)$

<u>du Théorème B' :</u> $P_k(Q)\text{-Mod} \underset{cat.}{\simeq} (kQ\text{-Mod})(1, T\Phi^+)$

<u>et de son "adjoint" :</u> $P_k(Q)\text{-Mod} \underset{cat}{\simeq} (kQ\text{-Mod})(T\Phi^-, 1)$

(on utilise un foncteur adjoint Φ^- de Φ^+ pour lequel on a encore Brenner-Butler-Gabriel à savoir $T\Phi^- = \tau^-$ sur kQ-mod).

On définit un (kQ-Mod)-isomorphisme de catégories

$$\Psi' : P_k(Q)\text{-Mod} \longrightarrow T_{kQ}(\Theta)\text{-Mod}$$

comme composée des (kQ-Mod)-isomorphismes

$$P_k(Q)\text{-Mod} \xrightarrow{\Psi} (kQ\text{-Mod})(1, T\Phi^+) \xrightarrow{\text{Lemma 1}} (kQ\text{-Mod})(T\Phi^-, 1) \xrightarrow{\text{Lemma 2}} T_{kQ}(\Theta)\text{-Mod}$$

$$(C, c) \longmapsto \left(\Theta^{\otimes^t_{kQ}} \otimes_{kQ} C \longrightarrow C \ \text{par récurrence sur } t \right)$$

Comme $T\Phi^-$ a un adjoint à gauche,

$$T\Phi^- = T\Phi^-({}_{kQ}kQ) \otimes -$$

Lemma 3 (voir bas page 2) $\longrightarrow$ $\cong$ kQ-Bimod

$$\mathrm{Ext}^1_{kQ}(D(kQ_{kQ}), {}_{kQ}kQ) = \Theta$$

Alors l'isomorphisme de catégories

$$\Psi' : P_k(Q)\text{-Mod} \longrightarrow T_{kQ}(\Theta)\text{-Mod}$$

est induit par un isomorphisme de kQ-algèbres

$$\eta : T_{kQ}(\Theta) \longrightarrow P_k(Q).$$

(ce qui donne l'énoncé du Théorème A).

En effet, on compose les foncteurs canoniques $P_k(Q)\text{-Mod} \longrightarrow kQ\text{-Mod}$ et $T_{kQ}(\Theta)\text{-Mod} \longrightarrow kQ\text{-Mod}$ avec le foncteur oubli $kQ\text{-Mod} \to k\text{-Mod}$ et on applique le lemme suivant.

<u>Lemma 4.</u> Soient R et R' des k-algèbres et soient

$$\Gamma : R\text{-Mod} \to k\text{-Mod} \quad \text{et} \quad R'\text{-Mod} \to k\text{-Mod}$$

les foncteurs oublis. Supposons qu'il existe une équivalence de catégories $\Psi : R\text{-Mod} \longrightarrow R'\text{-Mod}$ telle que $\Gamma = \Gamma'\Psi$. Alors il y a un isomorphisme de k-algèbres $R' \to R$ qui induit Ψ.

La preuve utilise la théorie de Morita. Voir Ringel.

<u>Remarque 1.</u> L'existence d'un isomorphisme de kQ-algèbres $\eta : T_{kQ}(\Theta) \longrightarrow P_k(Q)$ est assurée par le lemme 4 mais on n'en a pas de description explicite ! Ringel montre cependant que la restriction de η à kQ est l'identité et que l'idéal d'augmentation de $T_{kQ}(\Theta)$; i.e. l'idéal (bilatère) engendré par Θ, s'envoie par η sur l'idéal de $P_k(Q)$ engendré par Q_1^*.

<u>Remarque 2.</u> Ringel suggère de montrer <u>directement</u> que le kQ-bimodule engendré dans $P_k(Q)$ par Q_1^* est isomorphe à Θ.