A & G 2, exposé du 26/01/21

Exercice 6.7 :

Rappels et commentaires : orthogonalisation de G.S.

On se donne une base quelconque de l'e.v.e. . Le but est de construire une nouvelle base (à partir de celle dont on part) qui, elle, soit orthogonale (puis orthonormale).

$$\underset{\mathbb{R}^4}{\mathcal{E}} = (e_1, e_2, e_3, e_4) \xrightarrow[\text{de G}]{\text{orthogonalisée}} (f_1, f_2, f_3, f_4)$$

$$e_1 \dashrightarrow f_1 = e_1$$

$$e_2 \dashrightarrow f_2 - e_2 = \mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(f_1) \checkmark$$

$$(*) \quad f_2 = e_2 + \square\, f_1$$

Obs. : à cause de la relation $(*)$, on a :

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2) \overset{\supseteq}{\underset{\subseteq}{=}} \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$$

$e_3 \dashrightarrow f_3$ être orthog. à f_1 et f_2

$$(*) \quad f_3 = e_3 + \boxed{?}\, f_2 + \boxed{?}\, f_1$$

e_2 e_1

<u>obs.</u> : $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \overset{\supseteq}{\underset{\subseteq}{=}} \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$

$e_4 \dashrightarrow f_4$ être orth. à f_1, f_2, f_3

$$f_4 = e_4 + \boxed{}\, f_3 + \boxed{}\, f_2 + \boxed{}\, f_1$$

<u>obs.</u> : $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$$

<u>Concl</u> : (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ qui est orthogonale ; il reste à la normaliser.

$\mathbb{R}^4$

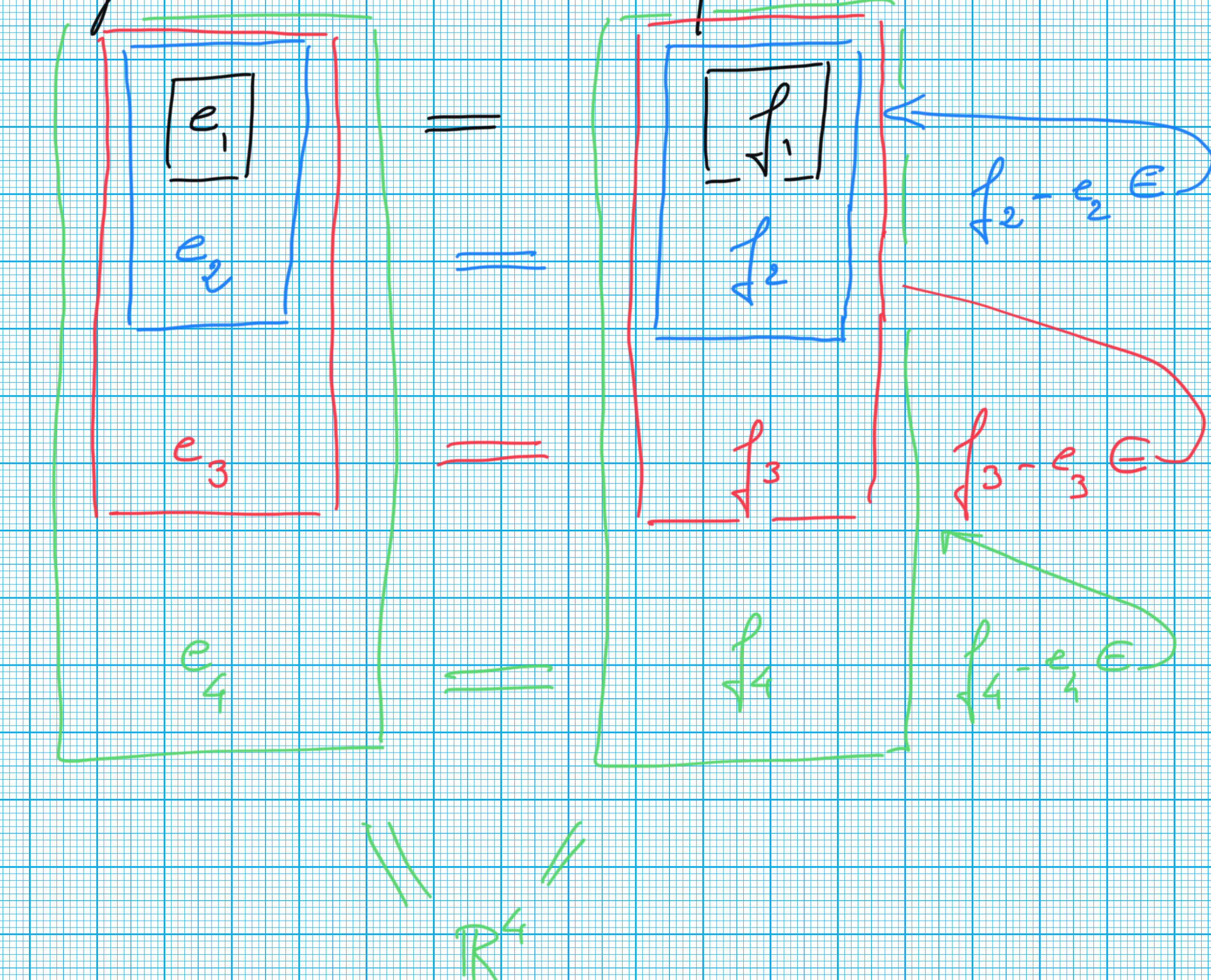
$e_1 = (1, 2, -1, -2)$

$e_2 = (2, 3, 0, -1)$

$e_3 = (5, -2, -5, -2)$

$e_4 = (8, 10, -10, 4)$

<u>But</u> : construire 4 vecteurs, f_1, f_2, f_3, f_4 deux à deux orthogonaux entre eux et tq



Calcul de f_1 : $f_1 = e_1 = (1, 2, -1, -2)$

Calcul de f_2 : On pose $\boxed{f_2 = \alpha_{12} f_1 + e_2}$

on aurait pu mettre e_1 ici !!

On sait que $(f_1 | f_2) = 0$

donc :

$$0 = (f_1 | f_2) = (f_1 | \alpha_{12} f_1 + e_2) = \alpha_{12} (f_1 | f_1) + (f_1 | e_2)$$

donc $\alpha_{12} = -\dfrac{(f_1 | e_2)}{(f_1 | f_1)} = -\dfrac{10}{10} = -1.$

Bilan : $f_2 = -f_1 + e_2 = (1, 1, 1, 1).$

e_i

Calcul de f_3 : On pose $f_3 = \alpha_{13} f_1 + \alpha_{23} f_2 + e_3$

$$0 = (f_1 | f_3) = (f_1 | \alpha_{13} f_1 + \alpha_{23} f_2 + e_3)$$

$$0 = \alpha_{13} (f_1 | f_1) + \alpha_{23} \underbrace{(f_1 | f_2)}_{=0} + (f_1 | e_3)$$

$$0 = (f_2 | f_3) = \alpha_{13} \underbrace{(f_2 | f_1)}_{=0} + \alpha_{23} (f_2 | f_2) + (f_2 | e_3)$$

On a donc $\begin{cases} \alpha_{13} (f_1 | f_1) + (f_1 | e_3) = 0 \\ \alpha_{23} (f_2 | f_2) + (f_2 | e_3) = 0 \end{cases}$

c.à.d : $\alpha_{13} = -1$ et $\alpha_{23} = 1$

d'où $f_3 = -f_1 + f_2 + e_3 = (5, -3, -3, 1)$.

Calcul de f_4 : On pose

$$f_4 = \alpha_{14} f_1 + \alpha_{24} f_2 + \alpha_{34} f_3 + e_4$$

et on a :

$$\left.\begin{array}{l} 0 = (f_1 | f_4) = \alpha_{14} (f_1 | f_1) + (f_1 | e_4) \\ 0 = (f_2 | f_4) = \alpha_{24} (f_2 | f_2) + (f_2 | e_4) \\ 0 = (f_3 | f_4) = \alpha_{34} (f_3 | f_3) + (f_3 | e_4) \end{array}\right\}$$

c.à.d : $\alpha_{14} = -\dfrac{(f_1 | e_4)}{(f_1 | f_1)} = -3$ $\qquad \alpha_{34} = -\dfrac{(f_3 | e_4)}{(f_3 | f_3)}$

$\alpha_{24} = -\dfrac{(f_2 | e_4)}{(f_2 | f_2)} = -3$ $\qquad = -1$

On trouve $f_4 = -3f_1 - 3f_2 - f_3 + e_4$

$$= (-3, 4, -7, 6).$$

Bilan :

$$f_1 = (1, 2, -1, -2)$$
$$f_2 = (1, 1, 1, 1)$$
$$f_3 = (5, -3, -3, 1)$$
$$f_4 = (-3, 4, -7, 6)$$

et on a vérifié que ces quatre vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux ; la famille qu'ils constituent est donc bien une base de $\mathbb{R}^4$.

La base (f_1, f_2, f_3, f_4) est l'orthogonalisée de G.-S. de (e_1, e_2, e_3, e_4).

Pour conclure, il reste à normaliser cette base pour obtenir une base orthonormale. L'orthonormalisée de G.-S. de (e_1, e_2, e_3, e_4) est donc

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}} f_1, \frac{1}{2} f_2, \frac{1}{2\sqrt{11}} f_3, \frac{1}{\sqrt{110}} f_4\right).$$

Exercice 6-1

Commentaire : le produit scalaire le plus habituel sur $\mathbb{R}^n$ est le p.s. appelé standard et défini comme en 1.6 du cours. Attention cependant, ce n'est pas le seul !

$$\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \longmapsto \underbrace{x_1y_1 + x_2y_2} + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

But : démontrer que ϕ est un p.s. de $\mathbb{R}^2$.

1. Symétrie de ϕ : Soient $x = (x_1,x_2)$ et $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\phi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$\phi((y_1,y_2),(x_1,x_2)) = y_1x_1 + y_2x_2 + \frac{1}{2}(y_1x_2 + y_2x_1)$$

Comme la multiplication et l'addition des réels est comm., ces deux expressions sont bien égales.

Bilan : ϕ est sym.

2. Bilinéarité : On doit montrer que :

① pour tout $y \in E$, l'applicat° partielle à gauche $\phi(-, y) : E \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \phi(x, y)$

est linéaire

et

② pour tout $y \in E$, l'application partielle à droite $\phi(y, -) : E \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \phi(y, x)$

Mais comme on a démontré que ϕ est sym., pour tout $y \in E$, on a $\phi(y,-) = \phi(-,y)$

Il suffit donc de vérifier le point ① ci-dessus. C'est ce que l'on fait maintenant.

Soit $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. (Cet y est fixé pour la suite). L'application partielle à gauche associée à cet y est :

$$\phi(-, y) : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x = (x_1, x_2) \longmapsto \phi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$= \left(y_1 + \frac{1}{2} y_2\right) x_1 + \left(y_2 + \frac{1}{2} y_1\right) x_2$$

Cette application est bien linéaire. On a donc mq toutes les appl. partielles à gauche sont linéaires. Par sym. toutes les appl. partielles à droite le sont aussi.

<u>Bilan :</u> ϕ est bilinéaire.

<u>3. ϕ est définie, positive.</u>

Soit $(x_1, x_2) \in E$. On a :

$$\phi((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_2x_1)$$

$$= \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2}. \quad (*)$$

$\oplus \quad \oplus \quad \ominus$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1\left(\frac{1}{2}x_2\right) \quad \leftarrow$$

$$= \left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2\right] + x_2^2 \quad \leftarrow$$

$$= \underbrace{\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2}_{\text{somme de carrés (méth. de Gauss)}} \quad (*')$$

On a donc obtenu que

$$\phi\big((x_1,x_2),(x_1,x_2)\big) = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2$$

Il s'ensuit que, $\forall (x_1,x_2) \in E$, $\phi\big((x_1,x_2),(x_1,x_2)\big)$ est positive ou nulle. Ceci mq ϕ est <u>positive</u>.

De plus, supposons que (x_1,x_2) est un elt de E tq $\phi\big((x_1,x_2),(x_1,x_2)\big) = 0$.

<u>Alors</u> $\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 = 0$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

D'où $(x_1,x_2) = (0,0)$.

<u>Bilan</u> : on a mq ϕ est un p.s.

p.s. standard $\qquad\qquad$ p.s. ϕ

D'après la cor. 2.8, l'e.v. euclidien standard $(\mathbb{R}^2, (\ |\ ))$ (cf ex. 1.6) admet une b.o.n. <u>mais</u> l'esp. euclidien $(\mathbb{R}^2, \phi)$ aussi.

<u>Quest°</u> : déterminer une b.o.n. de $(\mathbb{R}^2, (\ |\ ))$ et une b.o.n. de $(\mathbb{R}^2, \phi)$.

<u>Devoirs</u> : 1/ finir l'ex. ci-dessus.

2/ (i) lire § 3 du cours en détail

(ii) première question de l'ex. 6.8.