A&G2, exposé du 28/01/21

Ex. 6.1 : L'e.v. ambiant est $\mathbb{R}^2$ et on va comparer deux structures euclidiennes sur $\mathbb{R}^2$, différentes.

$\mathbb{R}^2$, $(-\mid-)$ st. eucl. standard, $\lVert - \rVert$	$\mathbb{R}^2$, ϕ, $\lVert - \rVert_\phi$
$(-\mid-) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \longmapsto x_1y_1 + x_2y_2$	$\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \longmapsto x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$

Obs : $(-\mid-)$ et ϕ sont des produits scalaires.

Bien connu : La base canonique de $\mathbb{R}^2$ **est** une b.o.n. de $(-\mid-)$; càd :

$$(e_1 \mid e_2) = 0, \quad \lVert e_1 \rVert = 1, \quad \lVert e_2 \rVert = 1$$

Mais $\phi(e_1, e_2) = \phi((1,0),(0,1)) = \frac{1}{2}(1\times 1 + 0 \times 0) = \frac{1}{2}$.

Ceci mq, pour ϕ, e_1 et e_2 ne sont pas orthogonaux !!!

Cherchons une base orthonormale relat. à ϕ.

* Partons d'un vecteur quelconque, par ex. e_1
* Cherchons un vecteur orthogonal à e_1.

Dire que $y=(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ est orthogonal pour ϕ au vecteur $e_1 = (1,0)$, c'est dire que

$$0 = \phi(e_1, y) = \phi((1,0),(y_1,y_2)) = y_1 + \frac{1}{2} y_2$$

Par ex : $y_1 = 1$ et $y_2 = -2$ conviennent

couple de réels

Donc, si l'on pose $y = (1,-2)$, la famille $\mathcal{F} = \underbrace{(e_1, y)}_{\text{couple de vecteurs}}$ est orthogonale.

Note : une famille orthogonale dont aucun vecteur n'est nul est toujours libre. Donc, $\mathcal{F}$ est une base orthogonale ! Il reste à la normaliser.

Calcul de $\|e_1\|_\phi$. On a :

$$\|e_1\|_\phi = \sqrt{1\times1 + 0\times0 + \frac{1}{2}(1\times0 + 0\times1)} = 1.$$

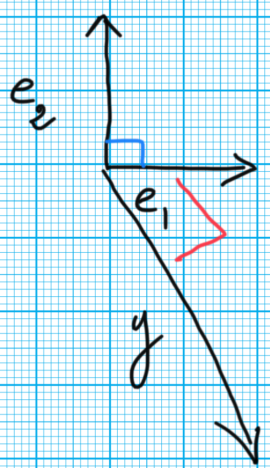
$$\|y\|_\phi = \sqrt{1\times1 + (-2)\times(-2) + \frac{1}{2}(1\times(-2) + (-2)\times1)}$$

$$= \sqrt{1 + 4 + \frac{1}{2}(-4)} = \sqrt{3}.$$

__Bilan :__ La base $\mathcal{B}' = \left(e_1, \frac{1}{\sqrt{3}} y\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ relat. à ϕ.

__Illustration :__ en bleu : le p.s. standard $(-|-)$

en rouge : le p.s. ϕ



① (e_1, e_2) et (e_1, y) sont toutes les deux des bases de $\mathbb{R}^2$

② (e_1, e_2) est une b.o.n. pour $(-|-)$ __mais__ pas pour ϕ

③ (e_1, y) est une b.o.n. pour ϕ __mais__ pas pour $(-|-)$.

__Ex. 6.8__ Lien entre un e.v.e. et son dual.

1. On considère l'application

$$\iota : E \longrightarrow E^*$$
$$x \longmapsto (x, -)$$

Commentaires :

① E^* est l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, càd l'ensemble des formes linéaires.

② Soit $x \in E$. L'application partielle associée à x, que l'on note $(x, -)$, est définie par :

$$\begin{aligned} (x, -) : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

fixé

variable

Comme $(-, -)$ est bilinéaire, l'application ci-dessus $(x, -)$ est linéaire. Autrement dit : $(x, -) \in E^*$.

Donc l'application $\iota : \begin{aligned} E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto (x, -) \end{aligned}$

est bien définie.

③ On veut maintenant mq ι est un isomorphisme d'e.v. càd. un morphisme d'esp. vect. (càd une appl. linéaire) qui en outre est bijective.

3.1 ι est une application linéaire.

Démontrons le. On se donne x et x' dans E, quelconques. Le premier but est de mq $\iota(x+x') = \iota(x) + \iota(x')$.

égalité entre formes linéaires

Soit $y \in E$. On a :

$$\big(\iota(x+x')\big)(y) = (x+x', -)(y) = (x+x', y)$$

$$\big(\iota(x) + \iota(x')\big)(y) = \big(\iota(x)\big)(y) + \big(\iota(x')\big)(y)$$

$$= (x, -)(y) + (x', -)(y)$$

$$= (x, y) + (x', y)$$

Comme $(-,-)$ est linéaire par rapport à sa première variable, on a bien

$$\big(\iota(x+x')\big)(y) = \iota(x)(y) + \iota(x')(y)$$

Et, comme ceci est vrai pour **tout** y de E, on a démontré que

$$\iota(x+x') = \iota(x) + \iota(x').$$

Le second obj. est de mq, si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\iota(\lambda x) = \lambda \iota(x)$.
A faire seuls !

<u>Bilan partiel</u> : ι est une application linéaire.

Il reste à montrer que ι est un isomorphisme, càd qu'elle est bijective.

On commence par mq ι est <u>injective</u>.
Comme ι est <u>linéaire</u>, elle est inj. <u>ssi</u> son noyau est réduit à $\{0\}$.
vecteur nul de E

$$\operatorname{Ker}(\iota) = \{ x \in E \,/\, \iota(x) = 0 \}$$

vecteur nul de E^* càd la forme lin. nulle.

Soit $x \in \operatorname{Ker}(\iota)$. Alors, par déf. de ι, on a $\iota(x) = (x, -) = 0$
de E^*

On a donc que, $\forall y \in E$,
$0 = (\iota(x))(y) = (x, -)(y) = (x, y)$.
En particulier, on doit avoir $(x, x) = 0$ et comme $(-,-)$ est un p.s. cela entraîne $x = 0$

cf condition 3 de la déf. de p.s.

On a donc démontré que tout élt x du noyau est nécessairement nul. Càd : on a mq $\ker(\varepsilon) \subseteq \{0\}$.

On a bien sûr $\{0\} \subseteq \ker(\varepsilon)$, car ε est linéaire.

A ce stade, on a mq $\ker(\varepsilon) = 0$ càd que ε est <u>injective</u>.

Il reste à mq ε est surjective.

<u>Rappel:</u> Si E et F sont des e.v. de <u>même</u> dimension finie et si $E \xrightarrow{\varphi} F$ est une application <u>linéaire</u>, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) φ est inj.

(ii) φ est surj.

(iii) φ est bij.

C'est une conséquence du Théorème du Rang.

Ici $\varepsilon : E \longrightarrow E^*$

E est de dim. finie et $\dim(E^*) = \dim(E)$

On déduit donc de ce qui précède que ε est nécessairement surjective.

Conclusion : on a démontré que ι est un isomorphisme.

2. Étant donné un endom. $u : E \longrightarrow E$, on veut démontrer qu'il existe un (autre) endomorphisme $v : E \longrightarrow E$ tq l'on ait :

$$\forall x, y \in E, \quad (u(x) , y) = (x , v(y))$$

De plus un tel v est unique. On l'appelle l'adjoint de u. (Voir la Prop 3-1 du cours). On le note u^*.

Obs. : les endo. qui ont un adjoint sympathique ont souvent de très bonnes propriétés.

ex : les endo. auto-adjoints (càd tq $u^* = u$) sont tous diagonalisables.

Ex. 6.10 : L'e.v. ambient est $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne standard. On considère $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

tq $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

où $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On veut :
1) Mq u est autoadjoint.
2) Diagonaliser u dans une b.o.n. (c'est poss. cf. Théo. 3.10).

1. On observe que la matrice de u relativement à la base $\mathcal{E}$ est symétrique (càd égale à sa transposée). Comme $\mathcal{E}$ est une b.o.n., cela entraîne (cf. Prop. 3.8) que u est autoadjoint.

2. Diagonalisons u dans une b.o.n.

Commentaire $g^{\underline{\underline{ale}}}$: supposons que u est un endo. autoadjoint de E et que ses valeurs propres soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ et notons $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ les ss-esp propres associés.

Comme u est diag., on a :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots + E_{\lambda_p}$$

Choisissons une base $\mathcal{B}_{\lambda_1}, \ldots, \mathcal{B}_{\lambda_p}$ de chacun de ces ss-esp. Alors la réunion de ces bases est une base $\mathcal{B}$ de E relativement à laquelle la matrice de u est diag.

<u>Attent°</u> : Si l'on procède comme ci-dessus, tout vecteur de $\mathcal{B}_{\lambda_i}$ sera orth. à tout vecteur de $\mathcal{B}_{\lambda_j}$ lorsque $i \neq j$, en effet les ss-esp. pp E_{λ_i} et E_{λ_j} sont $\perp$

<u>Mais</u> il n'y a aucune raison pour que deux vecteurs de la m̂ base $\mathcal{B}_{\lambda_i}$ soient $\perp$ entre eux.

Si l'on veut que $\mathcal{B}$ soit une b.o.n. il faut <u>choisir</u> dans chaque ss-esp propre une base qui est orthonormale.