A&G 2, Exposé du 02/02/21

Exercice 6.10 On a déjà observé que l'endomorphisme u est diag. car il est symétrique (cf. sa matrice dans la b.o.n. canonique de $\mathbb{R}^3$ est symétrique).

1. Recherche des valeurs propres de u : calcul du polyn. caract. et recherche de ses racines. Soit $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \chi(\lambda) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) - \lambda I_3\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 7-\lambda & 3-\lambda \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 7-\lambda & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & 11-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

position $(3,3)$ donc son facteur ds le dév. suivant la troisième col. sera $(-1)^{3+3}$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -4 & 11-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left[(4-\lambda)(11-\lambda) - (-2)(-4)\right]$$

$$= -(\lambda-3)\left[\lambda^2 - 15\lambda + 44 - 8\right]$$

$$= -(\lambda-3)\left(\lambda^2 - 15\lambda + 36\right)$$

$$= -(\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda-12)$$

$$= -(\lambda-3)^2(\lambda-12).$$

Psq $\mathrm{Spec}(u) = \{3, 12\}$

de plus la mult. de 3 ds χ est 2
et la mult. de 12 ds χ est 1.

Donc, u ad-et 2 espaces propres :

$$\ker(u - 3id) \text{ et } \ker(u - 12id).$$

et
$$1 \leq \dim(\ker(u - 12id)) \leq 1$$
$$1 \leq \dim(\ker(u - 3id)) \leq 2$$

Mais, on sait par ailleurs (cf. ci-dessus) que u est diag. donc :

$$\dim(\ker(u - 12id)) = 1$$

$$\dim(\ker(u - 3id)) = 2$$

2. Calcul des espaces propres.

- Calcul de $\ker(u - 3id)$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\,((u - 3.id))$

ssi $u((x, y, z)) = 3(x, y, z)$

ssi $(4x - 2y + 2z, -2x + 7y - 4z, 2x - 4y + 7z) = 3(x, y, z)$

ssi $\begin{cases} 4x - 2y + 2z = 3x \\ -2x + 7y - 4z = 3y \\ 2x - 4y + 7z = 3z \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + 4y - 4z = 0 \\ 2x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$

ssi $\{ x - 2y + 2z = 0$

Ainsi : $\mathrm{Ker}\,(u - 3id) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 2z = 0\}$

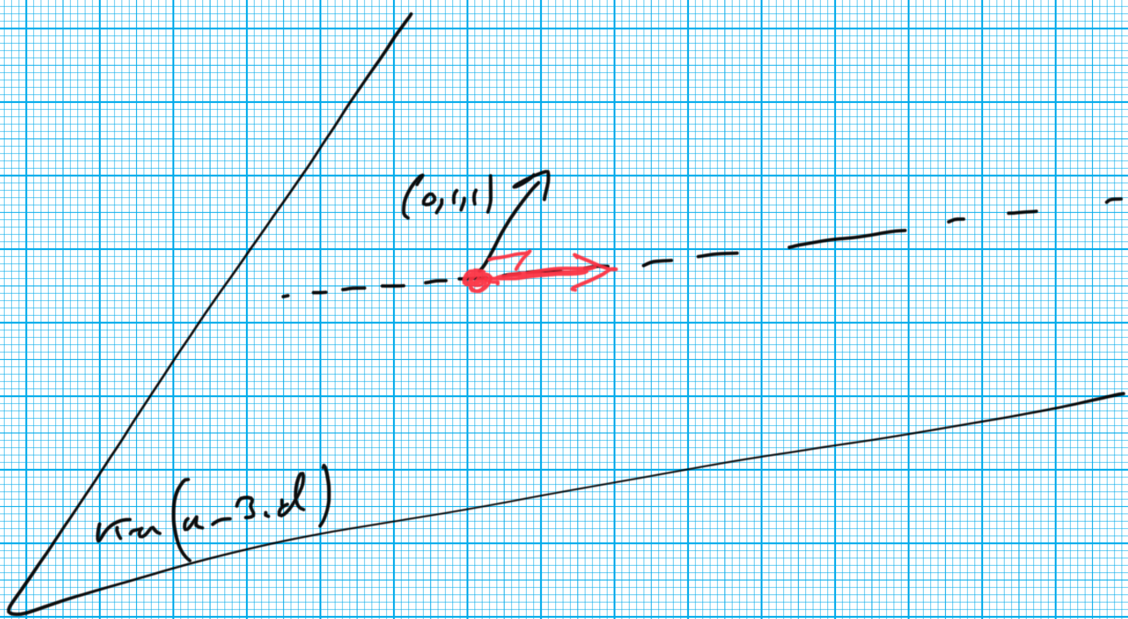
(descript° par éq.)

⚠ Il nous faut maintenant déterminer une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\,(u - 3\,id)$.

Par ex. : $(0,1,1) \in \mathrm{Ker}\,(u - 3\,id)$.

Il reste à trouver un autre élt de $\mathrm{Ker}\,(u-3id)$ qui soit $\perp$ à $(0,1,1)$.
Autrement dit : on cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq

1/ $\left\{ \begin{array}{l} a - 2b + 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{array} \right.$ cf $(a,b,c) \in \mathrm{Ker}(u-3id)$
2/ cf $(a,b,c) \perp (0,1,1)$



Par ex. : $(4, 1, -1)$ convient.

Concl. : $\ker(u - 3 id)$ admet pour base orthogonale : $((0, 1, 1), (4, 1, -1))$.

- Calcul de $\ker(u - 12 id)$.

note : comme les vecteurs ci-dessus sont $\perp$ et non nuls, ils forment une famille libre.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \in \ker(u - 12 id)$

ssi

⋮

ssi $\begin{cases} -8x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - 5y - 4z = 0 \\ 2x - 4y - 5z = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 2x - 4y - 5z = 0 \\ -2x - 5y - 4z = 0 \\ -8x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 2x - 4y - 5z = 0 \\ -9y - 9z = 0 \\ -18y - 18z = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} 2x - 4y - 5z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

variables principales   paramètres

Donc :

$$\ker(u - \mathrm{id}) = \left\{ \left(\frac{1}{2}\lambda, -\lambda, \lambda \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

description par paramètre

$$= \left\{ \lambda \left(\frac{1}{2}, -1, 1 \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \left(\frac{1}{2}, -1, 1 \right) \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ (1, -2, 2) \right\}$$

Bilan : $\ker(u - \mathrm{id})$ est la droite vectorielle de base $\{(1,-2,2)\}$.

A ce stade, on a la situation suivante :

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathrm{Ker}(u - 3id)}_{\text{Base } ((0,1,1),(4,1,-1))} \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{\mathrm{Ker}(u - 12\, id)}_{\text{Base } (1,-2,2)}$$

$\underbrace{((0,1,1),(4,1,-1))}_{\perp \text{ par choix !!!}}$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Base } \perp}$

$((0,1,1),(4,1,-1),(1,-2,2))$

Bilan : Soit $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{1}{3\sqrt{2}}(4,1,-1), \frac{1}{3}(1,-2,2)\right\}$

alors $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de vecteurs propres de u et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

A ce stade l'ex. est terminé.

<u>Complément :</u> on a donc maintenant deux bases, la base canonique $\mathcal{E}$ et la base $\mathcal{B}$ précédente et on sait que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont représentatives du m̂ endo. mais ds des bases différentes.

La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

cf : $(0,1,1) = 0.(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$

Obs. : la matrice $\mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ est une matrice de passage d'une b.o.n. à une autre b.o.n. donc (cf. cours) : son inverse est sa transposée :

$$\mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \left(\mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}\right)^{-1} = {}^{t}\mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$$

tjs vrai

vrai ici car les deux bases sont orthonormales.

Exercice 6.8 (cf. aussi Prop. 3.1)

Pour l'instant on admet le résultat de la question 2.

La question 2 démontre le point suivant : étant donné un endomorphisme u d'un espace euclidien E, il existe un et un seul endo. u^* tel que :

$\forall x, y \in E, \quad (u(x), y) = (x, u^*(y))$.

Lorsque $u^* = u$, on dit que u est un endo. symétrique, càd que $\forall x, y \in E$, $(u(x), y) = (x, u(y))$.

Exercice 6.11 On se donne un endo. u d'un e.v.e. E. Le but est de démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $u = u^*$ (càd u est auto-adjoint)

(ii) u est diag. et ses esp. propres sont deux-à-deux orthogonaux.

(i) $\Rightarrow$ (ii) C'est le contenu des énoncés suivants: Théorème 3.10 et Lemme 3.11.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Par hypothèse, u est diag. et de plus les espaces propres sont 2-à-2 orthogonaux. Autrement dit, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les v. p. de u, on a:

$$E = \underbrace{E_{\lambda_1} \oplus \cdots\cdots \oplus E_{\lambda_p}}_{\substack{\text{ces s-esp. st} \\ \perp \text{ deux-à-deux}}} . \qquad (*)$$

Chaque E_{λ_i} $(i = 1, \dots, p)$ a une base orthonormale (cf. Coroll. 3.8) ; on en choisit une : soit $\mathcal{B}_1$ une b.o.n. de E_{λ_1}, $\mathcal{B}_2$ une b.o.n. de E_{λ_2}, etc. Puis on considère

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i .$$

D'après $(*)$ $\mathcal{B}$ est une base de E. De plus, comme les esp. pp. st 2-à-2 orthogonaux, $\mathcal{B}$ est orthonormale. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} \ddots & & 0 \\ & & \\ 0 & \lambda_1 & \ddots \end{matrix} & 0 & & 0 \\ \hline & \begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix} & & 0 \\ \hline 0 & & & \vdots \\ & 0 & & \begin{matrix} \lambda_p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{matrix} \end{array}\right) \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{\mathcal{B}_1} \ \underbrace{\qquad\qquad}_{\mathcal{B}_2} \ \cdots\cdots \ \underbrace{\qquad\qquad}_{} \end{array}$$

Ainsi, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale et donc symétrique. Mais $\mathcal{B}$ est une b.o.n. donc (cf. Prop. 3.8) u est auto-adjoint.

Exercice 6.12

Données : E e.v.e.

u un projecteur de E.

Rappel d'algèbre linéaire : Soit E un e.v. et soit F et G deux sev de E, supplémentaires. On a donc $E = F \oplus G$. Par définition, la projection sur F parallèlement à G est l'application linéaire définie par :

$$p_{F,G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \\ \shortparallel & & \\ \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G} & & \end{array}$$

On a alors 1/ $\ker(p_{F,G}) = G$

2/ $\mathrm{Im}(p_{F,G}) = F$

3/ $\boxed{p_{F,G} \circ p_{F,G} = p_{F,G}}$ càd que toute proj. est une proj.

D'autre part, si f est un endo. tq $f \circ f = f$, alors f est une projection. De plus, $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$ et f est la proj. sur $\mathrm{Im}(f)$, parall. au noyau.

La quest° qui se pose cet exercice est la suivante.

On considère deux ssev $\boxed{\text{suppl.}}$ F et G d'un e.v. E et la proj. sur F, parall. à G :

$$p_{F,G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array}$$

$$x = x_F + x_G$$

<u>Q</u> : à quelle condit° a-t-on $\boxed{p_{F,G} = p_{F,G}^*}$

Rép. : $p_{F,G} = p_{F,G}^*$ ssi $F \perp G$.

Observation : On cons. F et G des ssev de E tq $E = F \oplus G$, comme ci-dessus.

Dire que F et G st orthogonaux signifie que $\forall x \in F$, $\forall y \in G$ on a $(x|y) = 0$.
En fait : les assertions suivantes st équiv. :

1. $F \subseteq G^\perp$
2. $G \subseteq F^\perp$
3. $F \perp G$

Ind. : utiliser le Théo. 2.11.

A faire pour jeudi :

* démontrer l'équiv. 1., 2., 3.
* démontrer la réponse ci-dessus.

— Fin de l'exposé —