Exposé du 04/02/21

<u>Exercice 6.12</u> Comme $u : E \longrightarrow E$ est un projecteur, il existe deux sev F et G de E, supplémentaires tq $u = p_{F,F}$ càd que

1/ $E = F \oplus G$

2/ $$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \overset{x}{\underset{x_F + x_G}{\parallel}} & \longmapsto & x_F \end{array}$$

On sait par ailleurs que $\mathrm{Ker}(u) = G$
et que $\mathrm{Im}(u) = F$
(note : un élt de F est sa propre image par u)

Enfin, on a que $F = \mathrm{Ker}(u - id_E)$ autrement dit, les élts de F sont les v.p. de v.p. 1, autrement dit encore, les éléments de F sont les vecteurs <u>invariants</u> par u (càd qui sont égaux à leur image).

Et dc : $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - id_E)$

Cela montre que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont 0 et 1.

Si l'on applique le résultat de l'ex. 6.11, on obtient donc que :

u est sym. ssi les esp. pp. de u sont orthogonaux

ssi $\boxed{F \perp G}$.

L'assertion $F \perp G$ signifie que "tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G". En fait, elle est équivalente à l'assertion $F = G^{\perp}$ qui, elle signifie "les vecteurs de F sont les vecteurs orthogonaux à tout vecteur de G".

Détaillons cette dernière équivalence.

Il s'agit donc de mq les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(\ast)\left\{\begin{array}{lll} (i) & F \perp G & \\ (ii) & F = G^{\perp} & (\text{càd } F \subseteq G^{\perp} \text{ et } F \supseteq G^{\perp}) \\ (iii) & F^{\perp} = G & \end{array}\right.$$

Il est clair que (ii) $\Rightarrow$ (i)

Il est clair que (i) $\Rightarrow F \subseteq G^{\perp}$. Comme de plus $\dim(G^{\perp}) \overset{\text{cours}}{=} \dim(E) - \dim(G) = \dim(F)$ d'où $F = G^{\perp}$.

car F et G sont suppl.

De même (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

<u>Bilan :</u> u est symétrique

<u>ssi</u> $\mathrm{Ker}(u) \perp \mathrm{Ker}(u - id)$

<u>ssi</u> $\mathrm{Ker}(u) \perp \mathrm{Im}(u)$

<u>ssi</u> $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)^{\perp}$.

cf Ex 6.11

cf. rappel sur les projections

cf. $(\ast)$

Exercice 6.13 e.v.e. $\mathbb{R}^3$ standard

$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

projection orthogonale sur H où H est l'hyperplan d'éq. $x - y + 2z = 0$.

On a donc $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x - y + 2z = 0\}$.

et $H^\perp$ est une droite.

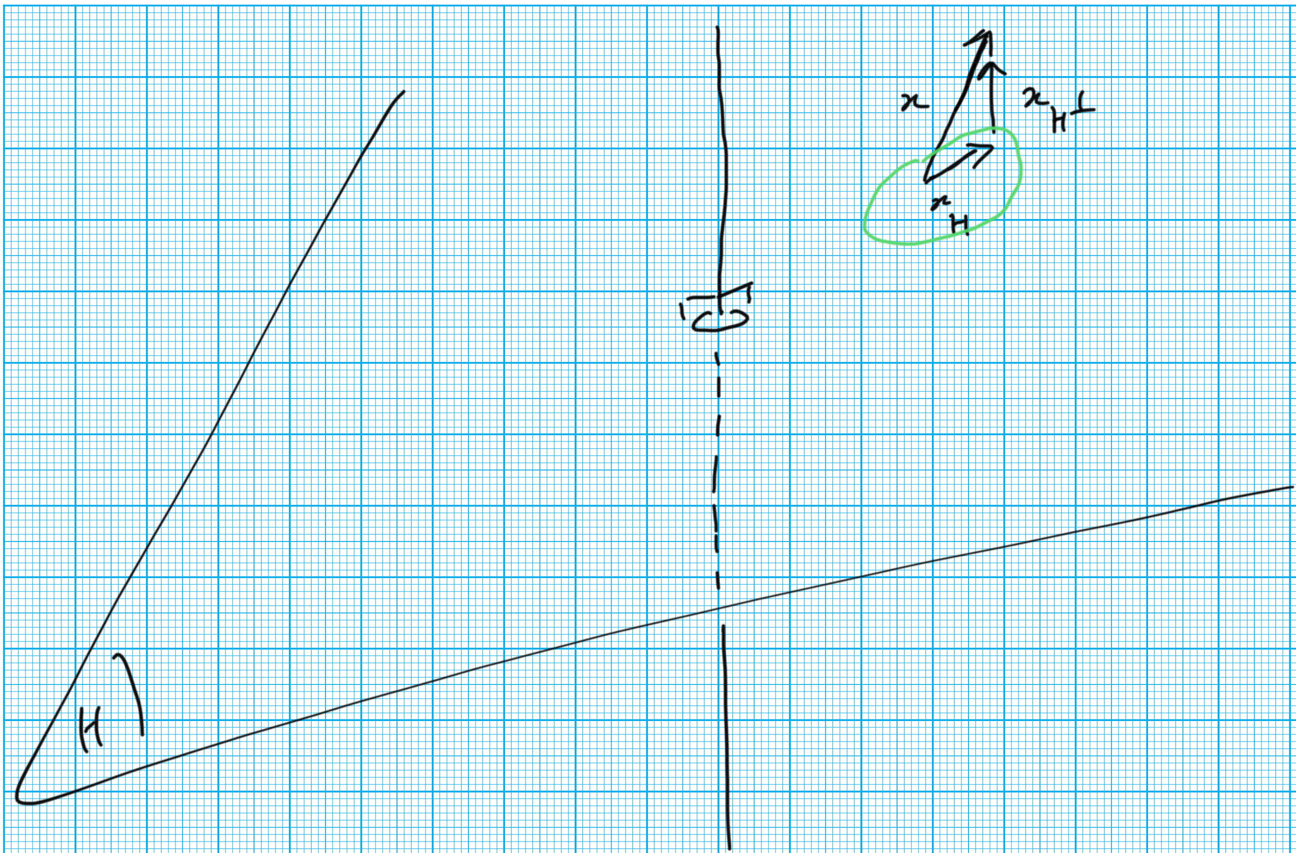
(cf. $\dim(H^\perp) = \dim(E) - \dim(H) = 3 - 2 = 1$)

Et, par déf. (cf. ex. 6.12) p est la proj. sur H, parallèlement à $H^\perp$.

Ce que l'ex. demande c'est une description de p sous la forme suivante :

$$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc)$$

"coord." du vecteur image en f$^{\text{ion}}$ de x, y, z



Quelle est l'image par p de $(1,1,1)$ ou encore $(0,-1,1)^t$.

Stratégie : on commence par observer qu'il est facile de calculer l'image par p d'un vecteur de H ou de $H^\perp$. Si l'on a une base de E formée de tels vecteurs, on pourra donc facilement calculer sa matrice.

Cela étant, les vecteurs de cette base ne seront pas simples à manipuler et on préférerait avoir à manipuler la base canon.

Il faudra donc "transférer" les résultats obtenus avec la base adaptée à H et $H^\perp$ à la base canonique, ce qui se fera par un changement de base.

1. Déterminer une base, $\mathcal{B}$, adaptée à H et $H^\perp$.
2. La matrice de p ds la base $\mathcal{B}$ sera alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{\text{vecteurs de } H,} \; \underbrace{}_{\text{de } H^\perp}$$

3. Lier la base $\mathcal{B}$ à la base can. $\mathcal{E}$ par le biais d'une matrice de passage.
4. En déduire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

5. En déduire l'expression analytique de p.

1. Recherche d'une base de E adaptée à $H \oplus H^\perp$.

On a $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$ $(1,-1,2)$

Donc $(1,1,0) \in H$ et $(1,-1,-1) \in H$.

De plus ces deux vecteurs sont orthog.

De plus $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / ((1,-1,2) | (x,y,z)) = 0\}$

$$= (\underbrace{\mathbb{R}(1,-1,2)}_{\text{droite vect. eng. par } (1,-1,2)})^\perp$$

et donc : $H^\perp = \left((\mathbb{R}(1,-1,2))^\perp \right)^\perp$

$$= \mathbb{R}(1,-1,2).$$

Concl. : $\mathbb{R}^3 = H \overset{\perp}{\oplus} H^\perp$

$((1,1,0),(1,-1,-1))$ $(1,-1,2)$

On a donc obtenu une base orthonormale

$$\mathcal{B} = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}_{b_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)}_{b_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)}_{b_3} \right)$$

adaptée à H et $H^\perp$.

2. $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} u(b_1) & u(b_2) & u(b_3) \end{array} & \end{array}$$

en effet, comme $b_1, b_2 \in H$, $\boxed{u(b_1) = b_1}$, $\boxed{u(b_2) = b_2}$

comme $u(b_3) = 0$, on a
$u(b_3) = 0 \cdot b_1 + 0\, b_2 + 0\, b_3$ d'où
la colonne n° 3.

3. Par définition, la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$ est la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

<u>Obs. très importante</u> : comme P est matrice de passage d'une b.o.n. à une b.o.n., elle est orthogonale (au sens des matrices, càd que ${}^tPP = P\,{}^tP = I_3$, ou encore $P^{-1} = {}^tP$).

On a donc $P^{-1} = {}^tP$.

4. La formule de chgt de base assure que

$$\overbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)}^{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}} = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p)\,P$$

Donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP$$

Donc :

$$\begin{array}{cccc}
 & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\
\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) = & \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 5/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{\text{est sym. comme prévu par l'ex. 6.12.}}
\end{array}$$

On a obtenu :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 5/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

5. On déduit de ce qui précède que :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}y-\frac{1}{3}z, \frac{1}{6}x+\frac{5}{6}y+\frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z\right) \end{array}$$

vérif. $\left\{ \begin{array}{ccc} (1,1,0) & \longmapsto & (1,1,0) \\ (1,-1,-1) & \longmapsto & (1,-1,-1) \\ (1,-1,2) & \longmapsto & (0,0,0) \end{array} \right.$

<u>Vérification</u> : on se souvient que

$p((1,1,0)) = (1,1,0)$. ✓

$p((1,-1,-1)) = (1,-1,-1)$ ✓

$p((1,-1,2)) = (0,0,0)$ ✓

Les calculs sont donc exacts !

<u>Exercice 6.14</u> A préparer pour le 05/02/21.

<u>Exercice 6.16</u> (1ère partie, càd question 1)

Rappels d'alg. lin. On ᶜ̃ un e.v. E et deux sev F et G de E, suppl. càd que $E = F \oplus G$. La symétrie par rapport à F, parallèlement à G est l'appl. lin. définie comme suit :

$$s = s_{F,G} : \quad E \longrightarrow E$$
$$\underset{\text{"}x_F + x_G\text{"}}{x} \longmapsto x_F - x_G$$

On a alors que $F = \ker(s - id_E)$

$G = \ker(s + id_E)$

et comme $E = F \oplus G = \ker(s - id) \oplus \ker(s + id)$ s est diag. et ses v.p. st 1 et -1.

Lorsque E est euclidien se pose la question suivante : s est-il autoadjoint ou pas ? La rép. est la suivante : s est autoadjoint ssi $F \perp G$.

On a vu ci-dessus que s est diag. (avec -1 et 1 pour v.p.) l'exercice 6.11 assure alors que s est sym. ssi ses esp. propres st 2-à-2 $\perp$. Or s a deux e.p. qui sont F et G, donc :

$$s \text{ est sym.} \iff F \perp G \overset{\text{cf. ex } 6.12}{\iff} F^{\perp} = G$$

Lorsqu'on est dans ce cas, on dit que s est une symétrie orthogonale.

Commentaires de lecture du §4 du cours :

Point 2 de la rmq 4.2.

Supposons que u est une isométrie.

Par déf., $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$

ce qui revient à dire que, $\forall x \in E$, $(x|x) = (u(x)|u(x))$.

On voudrait en déduire que u est orthogonal. Soient $x, y \in E$

$$
\begin{aligned}
2\left(u(x) | u(y)\right) &= \|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2 \\
&\overset{\text{lin. de } u}{=} \|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2 \\
&\overset{\text{Hypoth. : } u \text{ est une iso.}}{=} \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \\
&= 2(x|y).
\end{aligned}
$$

identité de polarisation

Préparer pour demain : Ex. 6.14.

Prop. 4.3 (dém.).

Fin de l'exposé.