Séance du 05/02/2021.

Commentaires sur le cours.

La démonstration de la Prop. 4.3. On $\tilde{c}$ un endo. u de l'e.v. euclidien E. On veut mq les assertions suivantes st équiv.

(i) u est orthogonal

(ii) u est inversible d'inverse u^*.

(On va utiliser la remarque 4.2).

(i) $\Rightarrow$ (ii) On supp. u orthogonal.

Rappel : dire que u est inversible signifie qu'il existe un endo. v de E tq $u \circ v = v \circ u = id_E$. Ceci est équiv. à dire que u est bijectif.

Puisque u est orthogonal, u est aussi une isométrie (cf. Rmq 4.2). Soit alors $\underline{x \in E}$, $\boxed{x \neq 0}$. On a $\|x\| \neq 0$ et donc $\|u(x)\| = \|x\| \neq 0$. Ce qui montre que $\boxed{u(x) \neq 0}$. Ainsi $\ker(u) = (0)$.

Par conséquent, u est injectif. Et, comme E est de dim. finie, cela entraîne que u est bijectif. On a donc mq u est inversible.

Il reste à montrer que $u^* = u^{-1}$ ou, ce qui revient au même, que $u^* \circ u = u \circ u^* = id_E$.

Rappel : u^* est caractérisé par l'identité :
$\forall x, y \in E, \quad (u(x)|y) = (x|u^*(y))$

On sait que u est orthogonal.

Soient $x, y \in E$.

Alors $(u(x)|u(y)) = (x|y)$

Mais $(u(x)|u(y)) = (x|u^*(u(y)))$

Donc : $(x|y) = (x|u^* \circ u(y))$. $\circledast$

Fixons $y \in E$. L'identité ci-dessus dit que : $\forall x \in E, \ (x|u^* \circ u(y) - y) = 0$.

Cela signifie que $u^* \circ u(y) - y$ est orthogonal à tout x de E. On a donc $u^* \circ u(y) - y = 0$ càd $u^* \circ u(y) = y$.

Comme ceci est vrai pour tout y de E,
on a $u^* \circ u = id_E$.

Rappel : si on considère deux endo. f et g d'un e.v. de dim. finie et si $f \circ g = id$, alors $g \circ f = id$.

On déduit donc de ce qui précède que $u \circ u^* = u^* \circ u = id_E$ et ainsi u est inversible d'inverse u^*.

Obs. : Ce dernier argument, qui conduit à $u \circ u^* = u^* \circ u = id_E$ montre en même temps que u est inversible. Il n'était donc pas nécessaire de commencer par montrer l'inj. de u puisque le second argument la retrouve.

(ii) $\Rightarrow$ (i) On suppose que u est inv. d'inverse u^*. Cela signifie que $u \circ u^* = u^* \circ u = id_E$.

Soit $x, y \in E$:

$$
\begin{aligned}
(u(x) \mid u(y)) &= (x \mid u^*(u(y))) \\
\text{par déf. de } u^* \quad &= (x \mid u^* \circ u(y)) \\
\text{hypoth. (ii)} \quad &= (x \mid y).
\end{aligned}
$$

Ceci démontre que u est orthogonal.

<u>Exercice 6.14</u> On $\tilde{c}$ l'endo. $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tq

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

<u>Obs.</u> : la matrice de u dans la <u>b.o.n.</u> $\mathcal{E}$ est sym. (càd ${}^tA = A$). L'endo. u est donc <u>symétrique</u> (càd autoadjoint). On en déduit (cf. cours) que u est diag. ds une b.o.n.

Approche classique :

→ calcul du polyn. caract. et des val. pp. (on trouverait 0 et 1)

→ à ce stade, u étant diag. on sait que c'est une projection et, u étant sym., que c'est une projection orthog. Plus précisément, c'est la proj. orth. sur $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u - id)$ et d'autre part $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)^{\perp}$.

Tout ce qui précède s'obtient avec les résultats de cours sur les proj. orth.

et les résultats de l'exercice 6.12.

Approche plus rusée (et moins calculatoire).

<u>Obs.</u> : On a : $u(e_1) = \frac{1}{6} e_1 + \frac{1}{3} e_2 - \frac{1}{6} e_1$

$u(e_3) = -\frac{1}{6} e_1 - \frac{1}{3} e_2 + \frac{1}{6} e_3$

Donc $\boxed{u(e_1) + u(e_3) = 0}$. càd $u(e_1+e_3)=0$.
Ceci mq $e_1 + e_3 \in \ker(u)$! En part. 0 est v.p.
De m̂ $\boxed{u(2e_1 - e_2) = 0}$, càd que
$2e_1 - e_2 \in \ker(u)$.
A ce stade on a que $\dim(\ker(u)) \geq 2$ puisque les vecteurs $e_1 + e_3$ et $2e_1 - e_2$, càd $(1,0,1)$ et $(2,-1,0)$, sont lin. indépendants.
De plus, on ne peut pas avoir $\dim(\ker(u)) > 2$, car sinon u serait est nul. Donc $\ker(u)$ est de dim 2 et plus précisément

$$\ker(u) = \mathrm{Vect}\Big((1,0,1),(2,-1,0)\Big).$$

Il découle de ce qui précède que $\mathrm{Im}(u)$ est de dim 1. Plus précisément :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3) \big)$$

Mais, on a déjà vu que $u(e_3) = -u(e_1)$ et $u(e_2) = 2u(e_1)$.

Donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\big(u(e_1) \big)$.

Compte tenu de ce qui précède on peut envisager que u est une proj. (ce sera le cas si 1 est la valeur propre qui nous manque). Si tel est le cas alors on doit avoir que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u - id)$.

Mais, $u(e_1) = \frac{1}{6}(1, 2, -1)$ et donc le vecteur $(1, 2, -1)$ est ds $\mathrm{Im}(u)$. De plus, une vérif. simple m'

$$u\big((1,2,-1)\big) = (1, 2, -1).$$

En effet : $\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{\text{matrice de } u \text{ ds } \mathcal{E}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ceci mq 1 est v.p. et que $(1,2,-1) \in \ker(u-id)$

Bilan prov. : $\underbrace{\ker(u)}_{\dim 2} \oplus \underbrace{\ker(u-id)}_{\dim \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^3$

en comparant les dim. on doit donc avoir :

$$\boxed{\ker(u) \oplus \ker(u-id) = \mathbb{R}^3.}$$

On a mq u est la proj. orthogonale sur $\ker(u-id) = \operatorname{Im}(u)$.

Exercice 6.16 (suite)

Rappel : un endo. f est une sym. ssi il est involutif càd lsq $f^2 = id$.
De plus, si f est une sym., c'est la sym. par rapport à $\ker(f - id)$ parall. à $\ker(f + id)$.

Le but de l'exercice est de mq les ass. suivantes sont équiv. :

(i) s est autoadjoint (càd $s = s^*$)
(ii) s est orthog.
(iii) $\ker(f + id) \perp \ker(f - id)$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) On sait que $s^2 = id$, ce qui signifie que s est inversible et égal à son inv. Donc, s est autoadjoint ssi $s^* = s$ càd ssi $s^* = s^{-1}$ càd ssi s est orthogonal.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Si s est autoadj., on sait qu'il est diag. et que ses ssesp. pp. sont 2 à 2 $\perp$. Or les ssesp. pp de s sont $\ker(s - id)$ et

$\ker(s+id)$. Donc $\ker(s-id) \perp \ker(s+id)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) On va utiliser l'ex. 6.11.

L'hypothèse (iii) et le fait que s est une sym. vect. assure que s est diag. et que ses s-esp. pp. st $\perp$. Donc, d'après l'ex 6.11, $s = s^*$.

<u>Exercice 6.15</u> :

Vocabulaire : par déf. une réflexion est une sym. orthogonale par rapport à un hyperplan.

On pose $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$, c'est la matrice de $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, relat. à la base canonique (qui est une b.o.n.).

<u>Obs.</u> : 1/ A est symétrique (càd ${}^tA = A$)

2/ A est orthogonale (càd ${}^tAA = I_3$)

Comme la base canon. est orthonormale

1/ assure que $u^* = u$

2/ assure que u est orthogonal.

On a donc $u \circ u = u \circ u^* = id$

cf $u = u^*$ cf u est orth.

On a donc mq $u^2 = id$. Donc u est une symétrie vectorielle. Plus précisément c'est la sym. par rapport à $\ker(u-id)$ parall. à $\ker(u+id)$ et ces deux ss esp. sont $\perp$. Donc c'est une sym. orth. (cf. : Ex. 6.16. question 1)).

Pour en déduire que u est une réflexion, il reste à mq $\ker(u-id)$ est de dim. 2.

Plusieurs cas sont alors possibles :

1°) $\ker(u-id) = (0)$ et $\ker(u+id) = \mathbb{R}^3$

Dans ce cas, $u = -id$.

2°) $\ker(u-id) = \mathbb{R}^3$ et $\ker(u-id) = (0)$

Dans ce cas, $u = id$.

3°) $\ker(u-id)$ est de d. 1

$\ker(u+id)$ " " " 2

Il existe une base ds laquelle la mat. de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (En part. $\det(u) = 1$

4°) $\dim(\ker(u-id)) = 2$
$\dim(\ker(u+id)) = 1$

et alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors $\det(u) = -1$.

Or, il est évident que $u \neq id_E$ et que $u \neq -id_E$. Donc les cas 1) et 2) sont exclus.

Le calcul du déterminant de A donne $\det(A) = -1$ donc $\det(u) = -1$ et puisqu'on est dans le 4°) cas. Ce qui montre que u est une sym. ⊥ par rapport à un hyperplan càd que c'est une réflexion.

<u>Pour mardi :</u>

Reprendre 6.15 par une méthode plus calculat.