Séance du 09/02/21

Exercice 6.15 (approche calculatoire)

Comme A est une matrice sym. et comme la b.c. est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, u est un endo. autoadjoint. Il est donc diag. dans une b.o.n.

Calcul du polyn. caract. χ : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1-9\lambda & 8 & 4 \\ 8 & 1-9\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 7-9\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 9-9\lambda & 8 & 4 \\ 9-9\lambda & 1-9\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 7-9\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 1 & 1-9\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 7-9\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7-9\lambda & -8 \\ 0 & -4 & 7-9\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\begin{vmatrix} 7+9\lambda & 8 \\ -4 & 7-9\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left[(7-9\lambda)(7+9\lambda)+32\right]$$

$$= (\lambda-1)\left[49-81\lambda^2+32\right]$$

$$= 81(\lambda-1)\left[1-\lambda^2\right]$$

$$= -81(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Donc $\operatorname{spec}(u) = \{-1, 1\}$. Comme u est diag. on sait que l'on doit avoir

* $\dim(\operatorname{Ker}(u-id)) = 2$.
* $\dim(\operatorname{Ker}(u+id)) = 1$!

<u>Calcul de $\operatorname{Ker}(u-id)$</u> :

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(u-id) \iff \begin{cases} x + 8y + 4z = 9x \\ 8x + y - 4z = 9y \\ 4x - 4y + 7z = 9z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -8x + 8y + 4z = 0 \\ 8x - 8y - 4z = 0 \\ 4x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

ssi $\left\{ 2x - 2y - z = 0 \right.$

Donc $\ker(u - id) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 2x - 2y - z = 0\}$.

$\overset{(*)}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ ((x,y,z), (2,-2,-1)) = 0\}$.

Calculons une b.o.n. de cet espace propre

Posons $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$; c'est un élt de ce s-esp. Il reste à en trouver un autre qui est $\perp$ à b_1. Un tel vecteur sera de la forme (a, b, c) avec

$$\begin{cases} 2a - 2b - c = 0 \\ \text{et} \quad a + b = 0 \end{cases}$$

On trouve par ex. : $b_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -1, 4)$.

Ainsi (b_1, b_2) est une b.o.n. de $\ker(u - id)$.

D'autre part, on sait d'après le cours que, u étant autoadjoint, ses esp. pp. sont 2-à-2 orthogonaux. Donc

$$\ker(u - id) \perp \ker(u + id)$$

<u>càd</u> $\ker(u - id) = (\ker(u + id))^{\perp}$

$$(\mathbb{R}(2,-2,-1))^{\perp} = (\ker(u+id))^{\perp} \quad \text{cf } (*)$$

<u>càd</u> $\boxed{\ker(u + id) = \mathbb{R}(2, -2, -1)}$

Posons $b_3 = \frac{1}{3}(2,-2,-1)$. Alors $\mathrm{Ker}(u+id) = \mathbb{R} b_3$,

(b_1, b_2, b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ de v.p. de u

et $\mathbb{R}^3 = \underbrace{\overbrace{\mathrm{Ker}(u-id)}^{H}}_{\substack{\text{dim. } 2 \\ \text{base } (b_1, b_2)}} \oplus \underbrace{\overbrace{\mathrm{Ker}(u+id)}^{D}}_{\substack{\text{dim } 1 \\ \text{base } (b_3)}}$

$$\mathrm{Mat}_{(b_1,b_2,b_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

en particulier : u est la sym. $\perp$ par rapport à $\mathrm{Ker}(u-id)$, parall. à $\mathrm{Ker}(u+id)$.

Note : $\mathbb{R}^3 = H \overset{\perp}{\oplus} D$

$$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\underset{\substack{\| \\ x_H + x_D}}{x} \longmapsto x_H - x_D.$$

Exercice 6.16 (2e question)

Considérons un vecteur $v \in E \setminus \{0\}$. A ce vecteur, on associe l'application :

$$s_v : E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto x - 2\underbrace{\frac{(x|v)}{(v|v)}}_{\in \mathbb{R}} v$$

On va démontrer que s_v est une réflexion.

Il faut mq :

1/ s_v est linéaire ;

2/ $s_v^2 = id_E$;

3/ $\ker(s_v - id) \perp \ker(s_v + id)$

4/ $\ker(s_v - id)$ est un hyperplan.

Comm : 1/ et 2/ mq s_v est une sym.

3/ mq s_v est (une sym) orthogonale

4/ mq s_v est (une sym. orth.) par rapp. à un hyperplan.

1) <u>Linéarité de s_v</u> :

* Soient $x, y \in E$,

$$s_v(x+y) = x+y - \frac{2}{(v|v)} \overbrace{(x+y|v)} v$$
$$= x+y - \frac{2}{(v|v)} \Big((x|v) + (y|v) \Big) v$$
$$= x - \frac{2}{(v|v)} (x|v) v \quad + y - \frac{2}{(v|v)} (y|v) v$$
$$= s_v(x) + s_v(y)$$

* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in E$, on a (vérif. facile)

$$s_v(\alpha x) = \alpha s_v(x).$$

Donc s_v est une application linéaire.

A ce stade, deux approches sont possibles. La première consiste à faire le calcul direct de s_v^2 : on considère un x quelconque de E, on calcule $s_v^2(x)$ et on constate que l'on trouve x.

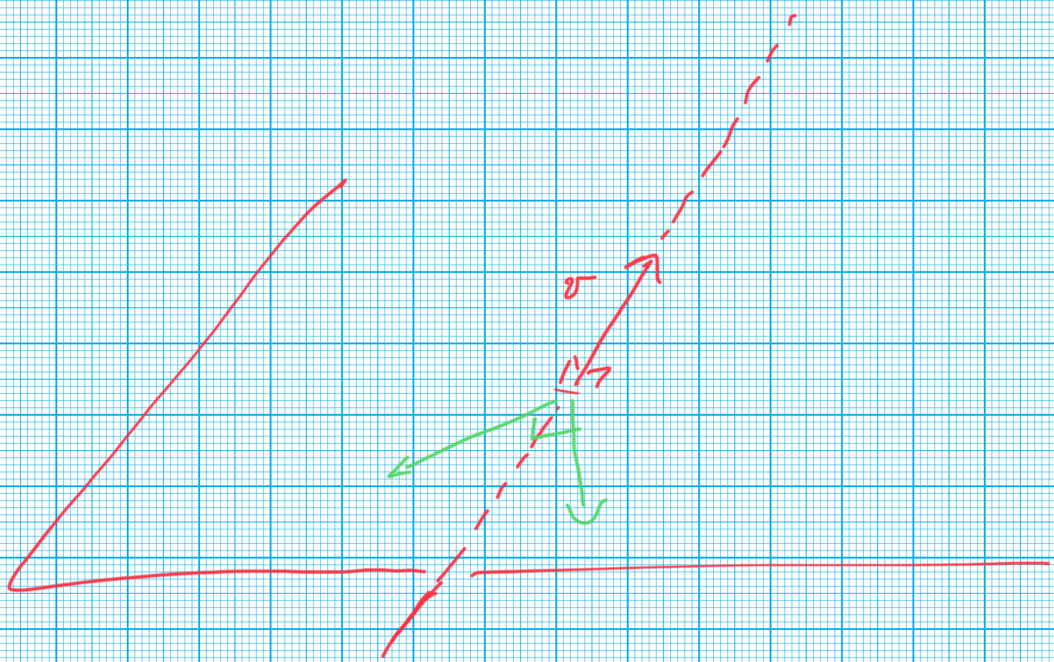
La deuxième option consiste à trouver une base adaptée à s_v et à faire la vérif. précédente uniquement sur les vecteurs de cette base.

Obs. : 1) $s_v(v) = v - 2\frac{(v|v)}{(v|v)}v = -v.$

C-à-d : v est v.p. de s_v de v.p. -1.

2) Si x est un vecteur orthogonal à v, on a : $s_v(x) = x - \frac{2(x|v)}{(v|v)}\cancel{v} = x.$

C-à-d : $\forall$ vecteur $\perp$ à v est un v.p. de v.p. 1.



Considérons l'hyperplan orthogonal à $\mathbb{R}v$.
Note : $\mathbb{R}v$ est de dim 1 donc $(\mathbb{R}v)^\perp$ est de dim. $n-1$ (où $n = \dim(E)$). Et de plus :

$$E = \underbrace{\mathbb{R}v}_{\text{droite vectoriel eng. par } v} \oplus \underbrace{(\mathbb{R}v)^\perp}_{\text{l'hyperplan des vecteurs orthogonaux à cette droite}}$$

Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une b.o.n. de $(\mathbb{R}v)^\perp$ et posons $e_n = \frac{1}{\|v\|} v$. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et de plus :

$$s_v(e_i) = e_i \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

et

$$s_v(e_n) = -e_n$$

Donc : pour $1 \leq i \leq n-1$,
$$s_v^2(e_i) = s_v(s_v(e_i)) = s_v(e_i) = e_i$$

et $$s_v^2(e_n) = s_v(\underbrace{s_v(e_n)}) = s_v(-e_n) = -s_v(e_n) = -(-e_n) = e_n.$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, $s_v^2(e_i) = e_i$.

<u>Concl :</u> $s_v^2 = id$.

De plus, on vient de montrer (cf. ci-dessus) que $e_1, \dots, e_{n-1} \in \ker(s_v - id)$ et que $e_n \in \ker(s_v + id)$

Donc : $$\overbrace{\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})}^{\dim\, n-1} \subseteq \ker(s_v - id)$$

$$\underbrace{\mathrm{Vect}(e_n)}_{\dim\, 1} \subseteq \ker(s_v + id)$$

Mais : $\ker(s_v - id)$ ne peut pas être de dim n car il est en somme directe avec $\ker(s_v + id)$ qui n'est pas nul. Donc il est de dim. $n-1$ càd que

$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = \ker(s_v - id).$$

Par ailleurs, cela force à avoir $\dim(\ker(s_v + id)) \leq 1$ et donc $\dim(\ker(s_v + id)) = 1$.

Donc $\ker(s_v + id) = \mathrm{Vect}(e_n)$.

Enfin, comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n., on a bien

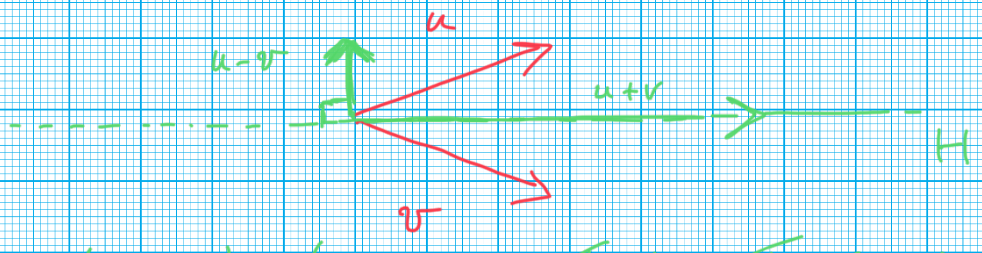
$$\ker(s_v - id) \perp \ker(s_v + id).$$

Concl. : s_v est une sym. donc les esp. pp st $\perp$, c'est donc une sym. orth. cf ex 6.16 question 1) et son esp. propre de v.p. 1 est un hyperplan, donc s_v est une reflexion.

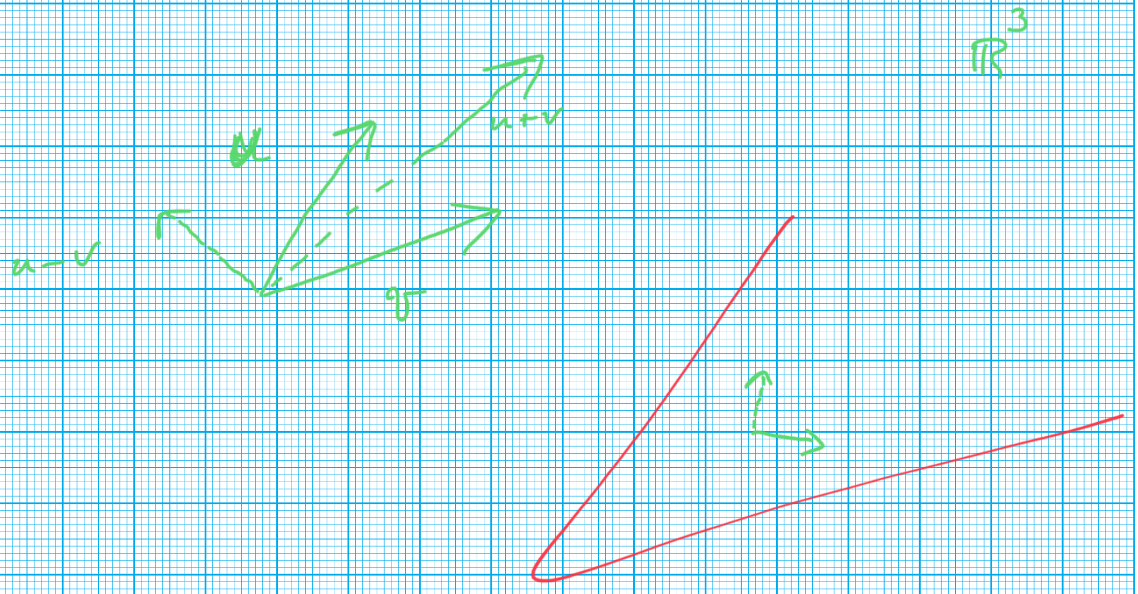
Pour jeudi : réflexion à la réciproque càd mq, si s est une réflexion, alors il existe $v \in E \setminus \{0\}$ tq $s = s_v$.

Exercice 6.18 E e.v.e., $u, v \in E$ unitaires et distincts. On veut montrer qu'il existe une reflexion et une seule qui envoie u sur v.

$\mathbb{R}^2$



$$(u-v \mid u+v) = (u,u) + \cancel{(u \mid v)} - \cancel{(v \mid u)} - (v \mid v) = 1 - 1 = 0.$$



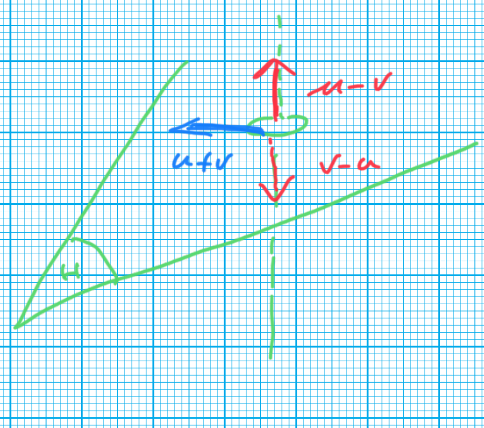
Comme u et v sont distincts, $u-v \neq 0$

on peut donc considérer l'hyperplan

$H = \left(\mathbb{R}(u-v)\right)^\perp$.

On peut ensuite considérer la réflexion par rapport à cet hyperplan ; notons la s.

Pb : on veut mq $v = s(u)$ $\big($et $u = s(v)\big)$



* Comme $u-v$ est orthogonal à H, on a $\boxed{s(u-v) = -(u-v) = v-u.}$ (1)

* On a $(u+v \mid u-v) = (u|u) - \cancel{(u|v)} + \cancel{(v|u)} - (v|v)$

$$= \|u\|^2 - \|v\|^2$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

càd $(u-v) \perp (u+v)$ <u>donc</u> $u+v \in H$.

Donc $\boxed{s(u+v) = u+v}$ (2)

(1) + (2) donne : $s(u-v+u+v) = s(u-v) + s(u+v)$

$$\begin{array}{ccc} s(u-v+u+v) & = & s(u-v)+s(u+v) \\ \parallel & & \parallel \\ s(2u) & & v-\cancel{u} + \cancel{u}+v \\ \parallel & & \parallel \\ \underline{2s(u)} & & \underline{2v} \end{array}$$

Concl. : $\boxed{s(u) = v.}$

Conclusion partielle : on a montré qu'il existe une réflexion s tq $s(u) = v$.

Il reste à montrer qu'il n'en existe qu'une.

Soit σ une réflexion tq $\boxed{\sigma(u) = v}$

Comme σ est une réflexion, $\sigma^2 = id$. Donc, de $\sigma(u) = v$, on déduit que $\boxed{\sigma(v) = u}$.

Il s'ensuit que $\boxed{\sigma(u-v) = \sigma(u) - \sigma(v) = v - u}$

En particulier, $u-v$ a la m̂ image par σ et par s et cette image est son opposé $-(u-v)$.

Comme σ et s sont des réflexions, cela impose que l'esp. pp. de v.p. -1 pour σ et s est l'ensemble des vecteurs orth. à $u-v$, càd H. Ainsi, H est l'esp. p. de v.p. 1 pour σ et s. Donc σ et s coïncident sur H : $\forall x \in H$, $\sigma(x) = x = s(x)$

Bilan : σ et s coïncident sur H et sur $H^\perp = \mathbb{R}(u-v)$. Comme $E = H \oplus H^\perp$. Donc,

σ et s coïncident sur tout E.
c.à.d $\sigma = s$.

Pour jeudi : 1 Résp. de la question 2) de 6.16
2 6.17.

Fin de l'exposé.