$\boxed{\text{Exposé du 11/02/21}}$

<u>Exercice 6.16</u> On a démontré que si $v \in E \setminus \{0\}$, l'application

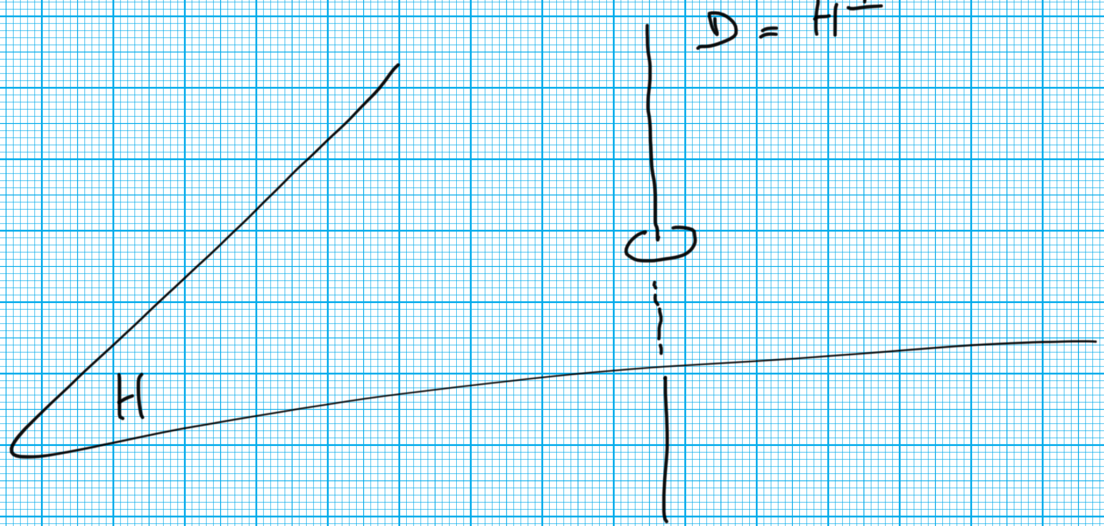
$$s_v : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto x - 2\frac{(x|v)}{(v|v)}v$$

est une réflexion. Cela se fait comme suit :

* s_v est une appl. lin.
* $s_v^2 = id_E$
* $\ker(s_v - id_E) = (\mathbb{R}v)^\perp$ (ce ssesp pp est donc de dim $n-1$)
* $\ker(s_v + id_E) = \mathbb{R}v$ (ce s esp pp est donc de dim 1).

On va démontrer que, réciproquement, <u>toute</u> réflexion est du type précédent. C-à-d que l'on va montrer la chose suivante : soit σ une réflexion, il existe un vecteur v non nul tq $\sigma = s_v$.

Soit σ une réflexion de E. On note $H = \ker(u - \mathrm{id}_E)$; c'est un sous-esp. vect. de dim. $n-1$.



Soit v un vecteur quelconque de $D \setminus \{0\}$. On va montrer que $\sigma = s_v$. Pour cela, on va montrer qu'il existe une base dont tous les vecteurs ont la même image par σ et par s_v.

On a $E = D \overset{\perp}{\oplus} H$. Choisissons une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à cette décomposition. Autrement dit, choisissons une base de H, une base de D et prenons la réunion.

Notons $e_1, \dots, e_{n-1}$ les vecteurs de la base de H et soit $e_n \in D \setminus \{0\}$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est donc une base de E. Posons $\boxed{v = e_n}$. On calcule maintenant les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ par τ et par s_v.

On sait que $s_v(e_n) = -e_n$. De plus, pour $1 \leq i \leq n-1$, $(e_i | v) = 0$. Donc $s_v(e_i) = e_i$.

D'autre part, par définition de τ, les élts de H sont laissés fixes par H : $\forall\, 1 \leq i \leq n-1$, $\tau(e_i) = e_i$. De plus, e_n est orthogonal à H. Donc, toujours par déf. de τ, $\tau(e_n) = -e_n$.

Ainsi, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, $\tau(e_i) = s_v(e_i)$. Comme ces vecteurs forment une base de E, on a : $\tau = s_v$.

Exercice 6.17 : On considère l'endo. $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, où $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle, dont la matrice rel. à la b.c. est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 24 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Obs. : La matrice de u dans la base orthonormale $\mathcal{E}$ est symétrique donc u est un endo. symétrique. On sait donc que u est diag. dans une b.o.n.

Obs. : on voit sur la matrice de u que $u(e_2) = 25\, e_2$. Donc e_2 est v.p. de v.p. 25.

Soit χ le polynôme caractéristique de u. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -7-\lambda & 0 & 24 \\ 0 & 25-\lambda & 0 \\ 24 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (25-\lambda) \det \begin{pmatrix} -7-\lambda & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 \\ 24 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (25-\lambda) \det \begin{pmatrix} -7-\lambda & 24 \\ 24 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-25) \det \begin{pmatrix} 7+\lambda & 24 \\ -24 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-25)\left[(7+\lambda)(7-\lambda) + 24^2 \right]$$

$$= (\lambda-25)\left[49 - \lambda^2 + 576 \right]$$

$$= (\lambda-25)(625-\lambda^2)$$

$$= (\lambda-25)(25-\lambda)(25+\lambda)$$

$$= -(\lambda-25)^2(\lambda+25).$$

Comme u est diag. ds une b.o.n. on a immédiatement : $\mathbb{R}^3 = \underbrace{\ker(u-25id)}_{\dim.\ 2} \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{\ker(u+25id)}_{\dim\ 1.}$

La matrice de u relat. à une b.o.n. adaptée à la déc. précédente, càd une b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ avec b_1, b_2 ds $\mathrm{Ker}(u - 25\,\mathrm{id})$ et b_3 ds $\mathrm{Ker}(u + 25\,\mathrm{id})$, est

$$M = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}.$$

<u>Obs.</u> : on peut prendre $b_1 = e_2$.

<u>Obs.</u> : $$M = 25 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice d'une homothétie de rapport 25}} \underbrace{\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \sigma(b_1) & \sigma(b_2) & \sigma(b_3) \end{matrix} & \end{array}}_{\text{Matrice d'une réflexion.}}$$

Notons h l'homothétie de $\mathbb{R}^3$ de rapport 25 et σ la réflexion par rapp. à l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(b_1, b_2)$.

L'identité de la dernière obs. dit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau)$$

càd $\quad u = h \circ \tau$. En d'autres termes, u est la comp. d'une homothétie et d'une réflexion.

$\boxed{\text{Lecture du §5 du cours}}$

<u>Commentaire :</u> dans l'approche "collège-lycée", la notion de rotation <u>succède</u> à celle d'<u>angle</u> ; dans l'approche moderne (20ème siècle) ce sont les rotations qu'on définit en premier puis les angles. La raison de cet inversion de point de vue tient à ce que définir la notion d'angle est compliqué.

<u>Définition :</u> Soit E un e.v.e. On appelle rotation toute application linéaire orthogonale (cf. §4) de déterminant 1.

On admet les résultats suivants qui sont démontrés en cours d'analyse : il existe deux fonctions, cos et sin, de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, resp. paires et impaires, et qui vérifient par ailleurs les relations suivantes :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

et la relation : $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

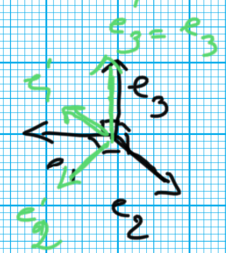
De plus, ces fonctions ont la prop. suivante : si a et b sont des réels tq $a^2+b^2 = 1$, alors il existe un réel x (unique à 2π près) tq $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$.

<u>Orientation d'un e.v.e.</u> Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux b.o.n. de E, la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est orthogonale, c.à.d ${}^tP\,P = I = P\,{}^tP$. Pour cette raison $\det(P)^2 = 1$ et donc $\det(P) = 1$ ou $\det(P) = -1$.

Orienter l'espace E consiste alors à choisir une <u>base de référence</u> $\mathcal{B}_0$. Une fois ce choix fait, il y a deux types de b.o.n. : les bases $\mathcal{B}$ tq $Pass_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ ait déterminant 1, on les appelera les b.o.n. <u>directes</u> et les base $\mathcal{B}$ tq $Pass_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ ait déterminant -1, on les appelera les b.o.n. <u>indirectes</u>.

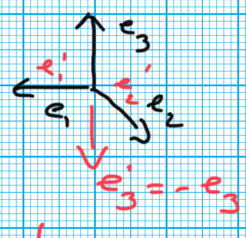
<u>Illustration :</u> $\mathbb{R}^3$ e.v.e. standard, orienté par la base canonique :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



La base verte est <u>directe</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



La base rouge est <u>indirecte.</u>

Classification des isométries en dim 2.

On fixe un e.v.e E de dimension 2.

Ex. 5.1 : Soit P une matrice orthogonale 2×2.
Comme P est une matrice orthogonale, on a ${}^tPP = I_2$.

Posons $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; donc ${}^tP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

L'identité ${}^tP\,P = I_2$ donne :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\psi \in \mathbb{R}$ tq

$a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

$c = \cos(\psi)$ et $d = \sin(\psi)$

L'équation $ac + bd = 0$ donne alors

$$\cos(\theta - \psi) = 0 .$$

1^{er} cas $\quad \det(P) = 1$.

Cela signifie que : $ad - bc = 1$
c-à-d : $\sin(\psi - \theta) = 1$.

Il s'ensuit que $\psi - \theta$ a un cosinus 0 et un sinus 1. Donc : $\psi - \theta$ est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π. C-à-d qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $\psi - \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ou encore $\boxed{\psi = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

cf : Cos est 2π-pér.

Par conséquent : $\cos(\psi) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

cf : $\cos(a+b) = \ldots$

$= -\sin(\theta)$.

et $\sin(\psi) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

$= +\cos(\theta)$.

Bilan : $P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & +\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

2^{e} Cas : Si $\det(P) = -1$, par la même méthode : il existe θ ds $\mathbb{R}$ tq

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$