Exposé du 25/02/21

Lecture du cours : chapitre 5.

Rappel : si E est un e.v. euclidien, on s'intéresse ds la suite aux endo. orthogonaux u (càd inv. et tq $u^* = u^{-1}$). Ils forment un groupe appelé groupe orthogonal de E, noté $O(E)$, et parmi ces endo., ceux de déterminant 1 forment un sous-groupe de $O(E)$, $SO(E)$, appelé groupe spécial orthogonal. Les élts de $O(E)$ ont un déterminant égal à 1 ou à -1.

But : classer les élts de $O(E)$ lorsque $\dim(E) = 2$ ou $\dim(E) = 3$ càd en dresser la liste exhaustive.

Rappel : un élt de $SO(E)$ est appelé une rotation. Ainsi, par définition, une rotation de $O(E)$ est un endo. orthogonal de déterminant 1.

A. Classification lorsque $\dim(E) = 2$.

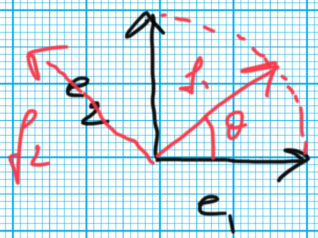
<u>Rappel</u> : Si P est une matrice orthogonale 2×2, deux cas sont possibles :

* $\det(P) = 1$. alors il existe un unique réel θ ds $[0, 2\pi[$ tq
$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

* $\det(P) = -1$; alors il existe un unique réel θ ds $[0, 2\pi[$ tq
$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

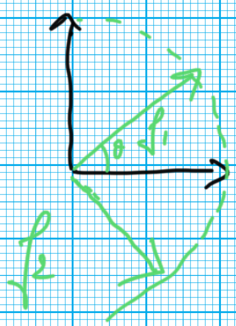
Illustration : si l'on se place ds $\mathbb{R}^2$, e.v.e. pour la structure standard et si l'on oriente $\mathbb{R}^2$ de la façon standard (càd la b.c. est directe) on peut interpréter les matrices orthog. ci dessus comme des matrices de passage de la base can. $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ à une nouvelle base $\mathcal{E} = (f_1, f_2)$.

Dans le premier cas, on a alors :



"Point de vue intuitif."

Dans le second cas, on a alors :



"Point de vue intuitif."

<u>Notation :</u> $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on pose :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R'_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

<u>Ex. 5.3</u> Observation : soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on vérifie facilement l'identité suivante :

$$R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha+\beta} = R_\beta \cdot R_\alpha$$

En particulier, ces deux matrices <u>commutent</u>.

Soient maintenant deux rotations r_1 et r_2, càd $r_1, r_2 \in SO(E)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale (directe) de E. Comme r_1 et r_2 sont des endo. orthogonaux, les matrices R_1 et R_2 resp. de r_1 et r_2 dans $\mathcal{B}$ sont orthogonales <u>et</u> comme r_1 et r_2 sont des rotations, ces deux matrices ont pour déterminant 1. (Voir prop. 4.6 et déf. 4.10.) D'après l'ex. 5.1, il existe θ_1 et θ_2 dans $[0, 2\pi[$ tq $R_1 = R_{\theta_1}$ et $R_2 = R_{\theta_2}$. Mais, d'après l'obs. ci-dessus, R_{θ_1} et R_{θ_2} commutent. Donc les endo. sous-jacents r_1 et r_2 commutent.

A.1. Les cas des rotations.

Soit u une rotation de E.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe.
D'après l'exercice 5.1, il existe une unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$.
Soit $\mathcal{E}$ une (autre) b.o. directe, il existe $\theta' \in [0, 2\pi[$ tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = R_{\theta'}$.
De plus, comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$ ont même orientation, la matrice de passage $P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}}$ est orthogonale de déterminant 1. L'exercice 5.1 assure qu'il existe $\pi \in [0, 2\pi[$ tq $P = R_\pi$.

On a alors : $R_{\theta'} = P^{-1} R_\theta P$.

Mais (cf. ex 5.3), R_θ et $P = R_\pi$ commutent donc il vient que

$$R_{\theta'} = P^{-1} R_\theta P = P^{-1} P R_\theta = R_\theta .$$

Donc $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$
Comme $\theta, \theta' \in [0, 2\pi[$, il s'ensuit que $\theta = \theta'$.

On a donc montré ceci : si u est une rotation, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$, unique, tq la matrice de u dans toute base orthonormée directe soit R_θ.

Ce réel θ est appelé la mesure d'angle de u.

A.2. Le cas des élts de $O^-(E)$.

Soit $u \in O^-(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée. La matrice de u ds $\mathcal{B}$ est orthogonale et de dét. -1. Donc (cf ex 5.1) il existe un (unique) réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R'_\theta$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

On trouve facilement que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\chi_u(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Par conséquent, u est la sym. orthogonale de E par rapport à la droite $\ker(u - id_E)$ parallèlement à la droite $\ker(u + id_E)$. Ainsi u est une réflexion.

<u>Bilan</u> : soit $u \in O(E)$:

* si $u \in SO(E)$, càd $\det(u) = 1$, u est une rotation et on peut définir sa mesure d'angle.

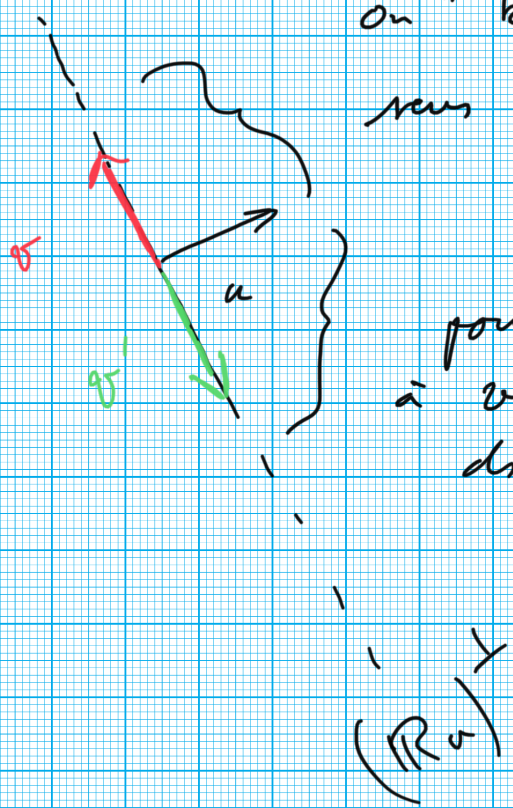
* si $u \in O^-(E)$, càd $\det(u) = -1$ c'est une réflexion.

<u>On précise maintenant le lien entre mesure d'angle d'une rotation et "angle" entre vecteurs.</u>

<u>Observation</u> : On se place dans un e.v.e. de dim 2, orienté par la b.o.n. $\mathcal{B}$. On se donne un vecteur unitaire u quelconque.

On veut montrer qu'il existe un unique vecteur v de E tq (u, v) soit une b.o.n.d.

Intuitivement :



pour passer de u à v on "tourne" ds un certain sens

pour passer de u à v' on "tourne" ds l'autre sens.

1ère étape : montrer qu'il existe deux b.o.n. dont le premier vecteur est u

2ème étape : montrer que l'une de ces bases est directe et l'autre indirecte.

Comme u est unitaire, $u \neq 0$. Par suite $\mathbb{R}u$ est une droite vectorielle et donc $\dim\left((\mathbb{R}u)^{\perp}\right) = 2 - \dim(\mathbb{R}u) = 1$. C.à.d que $(\mathbb{R}u)^{\perp}$ est une droite. On peut donc considérer un vecteur w non nul de E tq $(\mathbb{R}u)^{\perp} = \mathbb{R}w$. On peut même supposer que $\|w\| = 1$ (quitte à remplacer w par $\dfrac{w}{\|w\|}$).

Les vecteurs u et w sont donc orthogonaux et (u, w) est une b.o.n. Si l'on considère un vecteur w' tq (u, w') soit une b.o.n. Alors w' est de $(\mathbb{R}u)^{\perp}$. Donc w' est multiple scalaire de w : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $w' = \lambda w$. Enfin, $\lambda \neq 0$ car $w' \neq 0$.
Enfin, comme (u, w') est une b.o.n on doit avec $1 = \|w'\| = \|\lambda w\| = |\lambda| \|w\|$
$= |\lambda|$.

Par suite $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. C.à.d que $w' = w$ ou $w' = -w$.

Bilan : si $\mathcal{C}$ est une b.o.n. qui commence par u, alors

soit $\mathcal{C} = (u, w)$

soit $\mathcal{C} = (u, -w)$.

Réciproquement il est clair que (u, w) et $(u, -w)$ sont des b.o.n.

D'autre part, soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à (u, w) et P' la mat. de pass. de $\mathcal{B}$ à $(u, -w)$.

Alors, si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $P' = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$

On a donc $\det(P) = -\det(P')$.

Il s'ensuit que, parmi (u, w) et $(u, -w)$, l'une est directe et l'autre indirecte.

<u>Exercice 6.26</u> (à préparer pour demain).

* $\mathbb{R}^2$, e.v.e. muni de sa structure d'e.v.e. standard.

* u, v vecteurs unitaires.

Indication : considérer l'unique b.o.n. directe commençant par u : $\mathcal{U} = (u, u^\perp)$ et l'unique b.o.n.d. commençant par v : $\mathcal{V} = (v, v^\perp)$ puis la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{V}$.

Retour au cours :

B. Classification en dim. 3.

On se place dans un e.v.e. orienté de dim. 3.

Ex. 5.4

Rmq : en dimension 2, les rotations n'ont pas de valeur propre (sauf si leur mesure d'angle est 0 ou π).

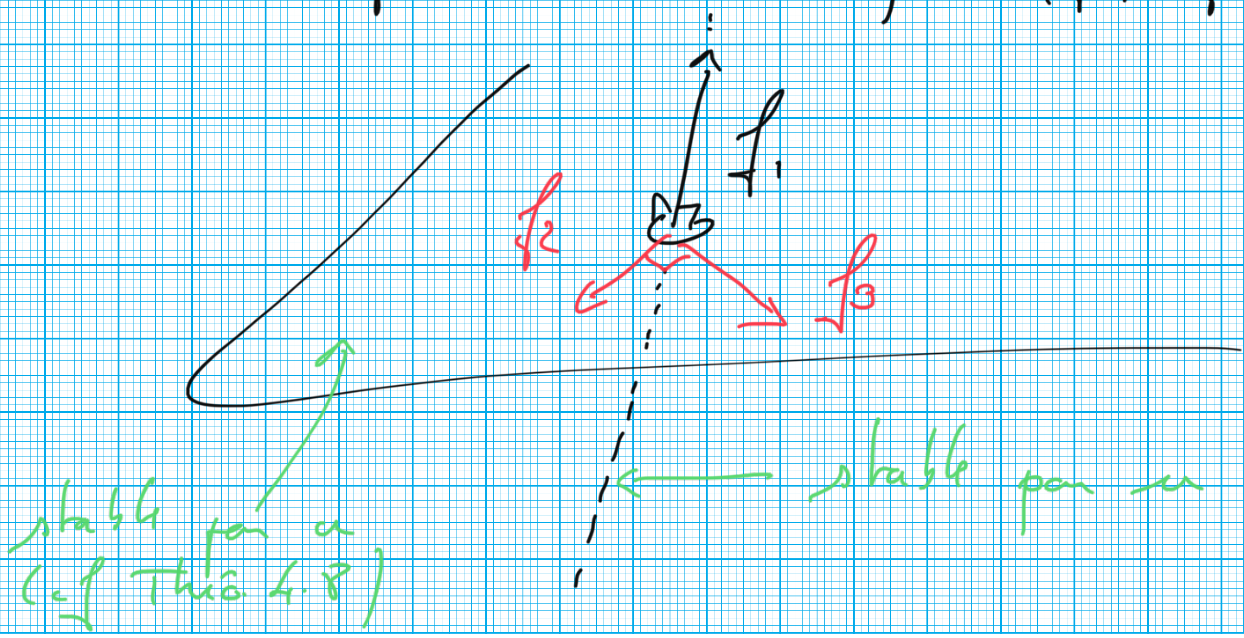
Lorsque l'e.v.e. est de dim. 3, le polyn. caract. de tout endo. (orth.) est de degré 3, donc il admet une racine. Comme par ailleurs les seules v.p. possibles pour un endo.

orthogonal sont 1 et -1, on a mq
H endo. orthog. d'un e.v.e. de
dim 3 ad_t 1 ou -1 comme v.p.

B. 1. Le cas des rotations.

On considère $u \in SO(E)$.

* On commence par mq 1 est v.p. de u.
Compte tenu de ce qui précède, il suffit
de mq, si -1 est v.p., alors 1 l'est aussi.
Supposons donc que -1 est v.p. de u
et montrons qu'alors 1 l'est aussi.
Puisque -1 est v.p., il existe un
vecteur f_1, unitaire, tq $u(f_1) = -f_1$.



Posons $H = (\mathbb{R} f_1)^{\perp}$. C'est un plan et on peut considérer une base (f_2, f_3) de ce plan. De sorte que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
D'après le 1^{er} point du Théo. 4.8, H est stable par u. La matrice de u relat. à $\mathcal{F}$ est alors de la forme suivante :

$$A = \begin{array}{ccc|l} u(f_1) & u(f_2) & u(f_3) & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ A = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \\ \quad\; u(f_1) \quad u(f_2) \quad u(f_3) \end{array}$$

Soit B la matrice 2×2 "en bas à droite" de A. Il est facile de vérifier que B est une matrice orthogonale de déterminant -1. Il s'ensuit que B admet 1 pour valeur propre. Pcq 1 est aussi v.p. de A.

<u>Concl.</u> : on vient de mq 1 est v.p. de u. On peut mq, si $u \neq id_E$, la mult. de la v.p. 1 est 1. (*)

Fixons un v.p. b_1 de v.p. 1. En raisonnant comme ci-avant, on peut construire une b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ tq

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ & \multicolumn{2}{c}{B} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

avec B matrice orthogonale de déterminant 1. Par conséquent, il existe un $\theta \in [0, 2\pi[$, unique tel que $B = R_\theta$. (Par ailleurs, comme $u \neq id_E$ on doit avoir $\theta \neq 0$.)

Supposons maintenant que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soient deux b.o.n. <u>d.</u> D'après ce qui précède, il existe θ et θ' ds $[0, 2\pi[$ tq

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_θ}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

et $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R_{\theta'}$}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

et, si $P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, on a :

$$P = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array}\right)$$

orthogonale de dét. 1.

et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\,P$.

On montre facilement (utiliser l'ex. 5.3) que P et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ commutent.
Il vient donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
et donc que $\theta = \theta'$.

Ainsi, on a montré le résultat suivant.
Si u est une rotation (différente de id_E) et si b_1 est un vecteur propre unitaire de v.p. 1, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$, unique tq la matrice de u ds toute b.o.n. directe commençant par b_1,

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_θ}} \\ 0 & & \end{array}\right).$$

On dit que θ est la mesure d'angle de u relatif au choix de b_1.