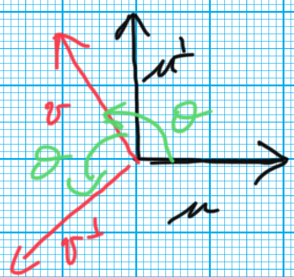
Exposé du 26/02/21

Exercice 6.26 Idée intuitive :



Comme E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, la donnée d'un endom. est équivalente à celle de l'image de deux vecteurs lin. indép. de E.

Posons $\mathcal{U} = (u, u^\perp)$ et $\mathcal{V} = (v, v^\perp)$; ce sont deux b.o.n. Considérons l'application linéaire $\rho : E \to E$ telle que $\rho(u) = v$ et $\rho(u^\perp) = v^\perp$.

Nous allons démontrer que ρ est une rotation.

On a, d'une part :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(\ell) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \end{array}\right) & \begin{array}{c} u \\ u^{\perp} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \ell(u) & \ell(u^{\perp}) \\ \text{"} v & \text{"} v^{\perp} \end{array} & \end{array}$$

et d'autre part :

$$\mathrm{Pass}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \end{array}\right) & \begin{array}{c} u \\ u^{\perp} \end{array} \\ \begin{array}{cc} v & v^{\perp} \end{array} & \end{array}$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(\ell) = \mathrm{Pass}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$. $(*)$

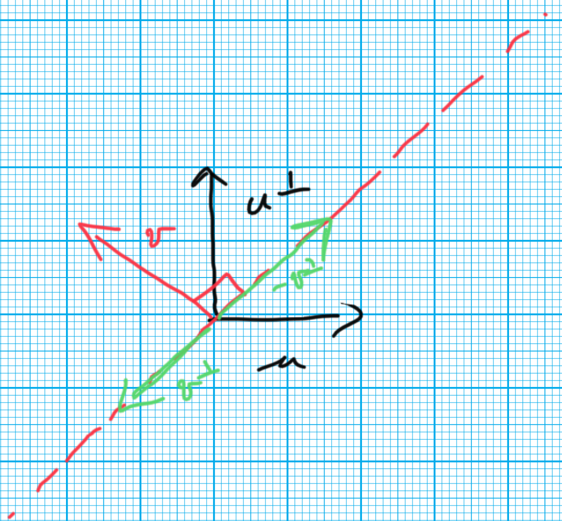
Mais, comme $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des b.o.n., d'après le corollaire 4.7, $\mathrm{Pass}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est orthogonale et comme $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ ont même orientation, $\mathrm{Pass}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est de déterminant 1. Donc $\mathrm{Pass}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est orthogonale de déterminant 1 et par conséquent $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(\ell)$ aussi d'après $(*)$.

Mais, comme $\mathcal{U}$ est une b.o.n. cela implique que ℓ est un endo-orthogonal. Bilan : ρ est un endo. orth. de déterminant 1 ; c'est-à-dire que ρ est une rotation.

On a ainsi démontré la partie "existence".

Passons à l'unicité. Soit r une $\boxed{\text{rotation}}$ telle que $r(u) = v$.

1) Comme r est une $\boxed{\text{application orthogonale}}$ on a : $(r(u), r(u^\perp)) = (u, u^\perp) = 0$ donc $r(u^\perp) \perp r(u)$. De plus, r est une isométrie, donc $\|r(u^\perp)\| = \|u^\perp\| = 1$. Donc, $r(u^\perp)$ est un vecteur de norme 1, orthogonal à $r(u) = v$. On a donc $r(u^\perp) = v^\perp$ ou $r(u^\perp) = -v^\perp$.



2) Il reste à démontrer que $r(u^\perp) \neq -v^\perp$.
Supposons que $r(u^\perp) = -v^\perp$. Si tel est le cas, l'image de la b.o.n.d $\mathcal{U}$ par r est la base $(v, -v^\perp)$ qui est orthogonale indirecte. Pcq

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(r) = \mathrm{Pass}_{\mathcal{U},(v,-v^\perp)}$$

Mais $\mathrm{Pass}_{\mathcal{U},(v,-v^\perp)}$ est la m̂ que $\mathrm{Pass}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ à ceci près que la deuxième colonne est changée en son opposé ; donc $\det\left(\mathrm{Pass}_{\mathcal{U},(v,-v^\perp)}\right) = -\det\left(\mathrm{Pass}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}\right)$

$$= -1.$$

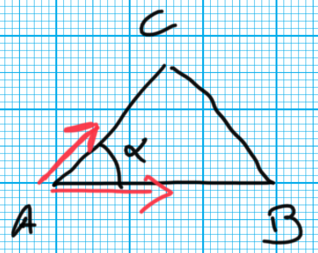
Il s'ensuit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(r)$ est de déterminant -1, ce qui contredit le fait que r est une rotation.

On a mq $r(u^\perp) \neq -v^\perp$.

Concl : on a $\boxed{r(u^\perp) = v^\perp}$ et donc $r = \rho$.

Commentaire (introductif à l'ex. 6.29)

L'exercice 6.26 permet de donner un sens rigoureux à la notion d'angle entre deux vecteurs unitaires.



Etant donnés 2 vecteurs (unitaires) u et v, on a vu à l'ex. 6.26 qu'il existe une et une seule rotation $\mathcal{C}$ qui envoie u sur v.

On va appeler angle orienté entre u et v cette rotation :

$$\boxed{\widehat{(u, v)} = \mathcal{C}}$$

puis, associée à $\mathcal{C}$ il existe un unique réel θ ds $[0, 2\pi[$ tq θ st la mesure d'angle de $\mathcal{C}$. On dira alors que θ est la mesure d'angle orienté des vecteurs u et v :

$$\operatorname{mes}\widehat{(u,v)} = \theta .$$

<u>Exercice 6.22</u> On considère l'endo. u de l'e.v.e. $\mathbb{R}^3$ dont la matrice repr. ds la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le but est la description géométrique de cet endo. : on va montrer que u est une rotation et préciser laquelle.

On va suivre le prog. suivant :

* vérifier que u est une rotation (différente de l'identité)
* déterminer son <u>axe</u> càd son esp. p. de v. p. 1. et en <u>choisir</u> une base
* déterminer la mesure d'angle de u relative à ce choix.

Pour vérifier que u est un <u>endo. orthogonal</u>, on va utiliser la Prop. 4.6 du cours. Comme la b.c. est une b.o.n., il suffit de mq ${}^tAA = I_3$. On vérifie facilement que c'est le cas. Donc $u \in O(E)$. Comme de plus $\det(u) = 1$ (facile), $u \in SO(E)$ càd que u est une <u>rotation</u>.

Il est clair d'autre part que $u \neq id_E$. La théorie prévoit donc que 1 est v.p. de u de multiplicité 1.

Déterminons l'axe de cette rotat°, (càd son esp. pp. de v.p. 1).

<u>Calcul de $\ker(u - id_E)$</u> :

Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$u((x,y,z)) = (x,y,z)$$

<u>ssi</u> $\begin{cases} -y = x \\ z = y \\ -x = z \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

On a donc :

$$\ker(u - id_E) = \{(-\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathbb{R}(1, -1, -1)$$

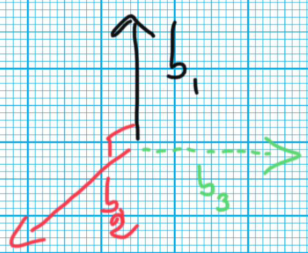
Posons $\boxed{b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)}$

On sait qu'alors, il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tq la matrice repr. de u dans <u>toute</u> b.o.n.d. qui commence par b_1 est

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{R_\theta} \end{array}\right).$$

<u>Calcul de θ.</u>

Déterminons une b.o.n.d. qui commence par b_1.



Posons $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$. On a bien $b_1 \perp b_2$.

Cherchons donc un vecteur b_3 qui soit orthogonal à b_1 et à b_2.

On trouve que $b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$ convient.

A ce stade, on sait que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base orthonormée

$$P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que $\det(P) = 1$ donc $\mathcal{B}$ est une $\underline{\underline{\text{b.o.n.d.}}}$ Pcq, la valeur de θ relative au choix de b_1 comme vecteur directeur de $\mathrm{Ker}(u - id_E)$ est donné par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, qui sera

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right) & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} u(b_1) & u(b_2) & u(b_3) \end{array} & \end{array}$$

.

On sait donc que

$$u(b_2) = \cos(\theta)\, b_2 + \sin(\theta)\, b_3$$

On a $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u(b_2)) = A \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Matrice donnant les coord. de $u(b_2)$ de $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$

Autrement dit : $u(b_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$

Mais, on a : $\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}} = \left(\mathrm{Pass}_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}\right)^{-1}$

$$= {}^{t}\mathrm{Pass}_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}$$

On a donc :

$$
\mathrm{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{array}{cccc}
\left(\begin{array}{ccc} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{array}\right) & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \\
\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} &
\end{array}
$$

c.à.d $\quad e_1 = 1/\sqrt{3}\, b_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} b_3$

$\vdots$

Donc : $\quad u(b_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 + e_3\right)$

$$
= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}} b_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} b_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} b_3\right) + \left(\cancel{-\frac{1}{\sqrt{3}} b_1} + \frac{2}{\sqrt{6}} b_3\right)\right]
$$

$$
= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} b_2 + \frac{3}{\sqrt{6}} b_3\right]
$$

$\cos(\theta)$

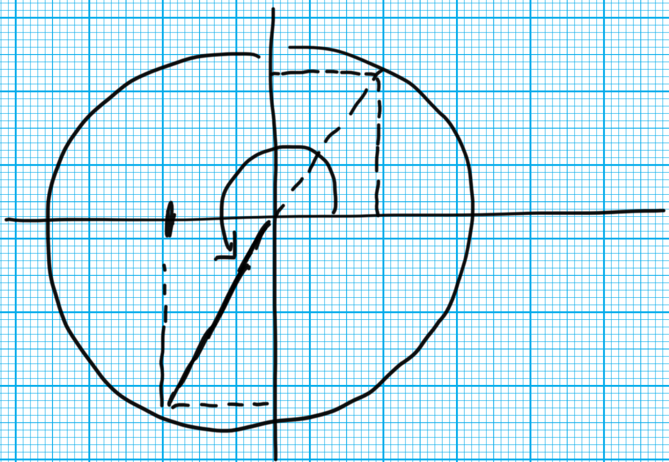
$$
= -\frac{1}{2} b_2 - \frac{3}{2\sqrt{3}} b_3
$$

$\sin(\theta)$

$$
= -\frac{1}{2} b_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_3
$$

On a donc : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$

$\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Par $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

<u>Concl.</u> : u est la rotation d'axe $\mathbb{R} b_1$ et dont la mesure d'angle relative à b_1 est $4\pi/3$.