Exposé du 2 Mars 2021

Suite et fin de la lecture de la partie VI.

B.2 Le cas des élts de $O(E)$.

On considère un élt u de $O(E)$ de déterminant -1.

En procédant comme pour le cas des rotations, on obtient les résultats suivants :

*) -1 est v.p. de u ; de plus, si $u \neq -id_E$, -1 est v.p. de multiplicité 1 càd que le ssesp propre $\mathrm{Ker}\,(u + id_E)$ est une droite.

*) Si $u \neq -id$, $\mathrm{Ker}\,(u+id_E)$ est une droite, appelée axe de u et on choisit un vecteur unitaire f_1 sur cette droite (il y a deux choix possibles). On peut alors démontrer qu'il existe un réel $\theta \in [0, 2\pi[$, unique, tq la matrice de u dans

toute b.o.n.d. qui commence par f_1 soit

$$\left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \quad 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & R_\theta \end{array}\right)$$

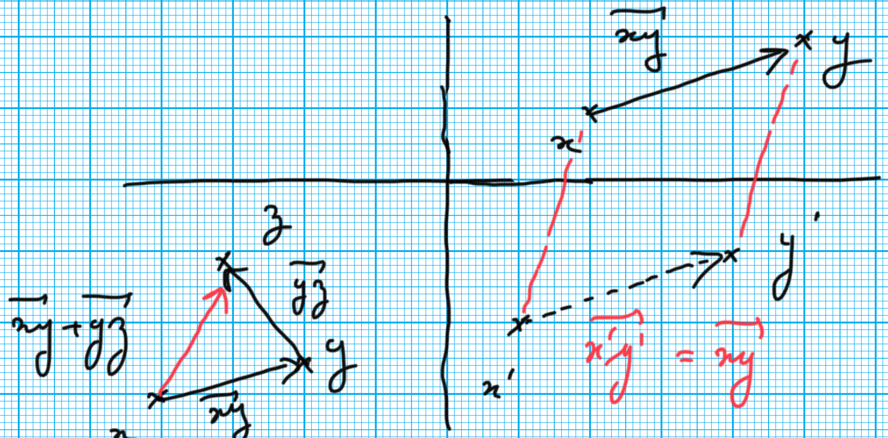
Ce réel θ est appelé la mesure d'angle de u relative au choix de f_1.

Lecture de la partie VII.

Définition 1.1. $(E, \vec{E}, \phi)$ ensemble de "points"

$$\phi : E \times E \longrightarrow \vec{E}$$

1) relation de Chasles



2) Pour tout $x \in E$, l'application partielle $\phi_x : E \longrightarrow \vec{E}$, $y \longmapsto \overrightarrow{xy}$ est une bijection.

<u>Ex. 1.2</u> $\forall x, y \in E$:

1. $\overrightarrow{xx} = \vec{0}$ (Utiliser la relation de Charles)

2. $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$

En effet, la relation de Charles assure que $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yx} = \overrightarrow{xx} = \vec{0}$

cf 1.

Donc $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$.

3) Supposons $\overrightarrow{xy} = \vec{0}$. Par déf. l'appl.
$\phi_x : E \longrightarrow \vec{E}$, $y \longrightarrow \overrightarrow{xy}$ est injective.

Mais : $\phi_x(x) = \overrightarrow{xx} = \vec{0}$

Donc, comme $\phi_x(y) = \overrightarrow{xy} = \vec{0}$

on doit avoir $x = y$.

Rmq 1.3 : Soit $\vec{u} \in \vec{E}$.

A tout élément x de E, on peut associer l'application partielle

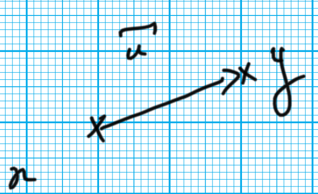
$$\begin{aligned} \phi_x : E &\longrightarrow \vec{E} \\ y &\longmapsto \vec{xy} \end{aligned}$$

et comme cette application est bijective, il existe un unique $y \in E$ tq $\vec{xy} = \vec{u}$

En fait :

$$\boxed{y = \phi_x^{-1}(\vec{u}).}$$

Le point y est alors caractérisé par l'égalité : $\vec{xy} = \vec{u}$: y est l'unique élt de E tq $\boxed{\vec{xy} = \vec{u}}$. Ce point est appelé le translaté de x par le vecteur $\vec{u}$



On a ainsi construit une application :

$$\begin{aligned} T_{\vec{u}} : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto y \text{ tel que } \vec{xy} = \vec{u}. \end{aligned}$$

$T_{\vec{u}}$ est appelé la translation de vecteur $\vec{u}$.

Il est facile de démontrer que :

1) $T_{\vec{0}} = id_E$.

2) $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$.

3) $T_{\vec{u}}$ est bijective, $\forall \vec{u} \in \vec{E}$.

<u>Notation</u> (attent° risque de confusions !!!)

Si $\vec{u} \in \vec{E}$, il est coutumier d'utiliser la notation suivante : pour $x \in E$, on note

$$\underbrace{x + \vec{u}} := y = T_{\vec{u}}(x) \quad \text{le translaté de } x \text{ par } \vec{u}.$$

↳ Attent° : additionner un point et un vecteur <u>n'a</u> pas <u>de sens</u> donc la notat° $x + \vec{u}$ n'est en aucun cas une addition : $x + \vec{u}$ <u>signifie</u> : transl. de x par $T_{\vec{u}}$.

Exercice 1.4 : Structure d'espace affine sur un e.v.

Soit $\mathcal{E}$ un e.v. On peut considérer l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\times\mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (x,y) &\longmapsto y-x \end{aligned}$$

de ce côté là on pense à des points

de ce côté là on pense à des vecteurs

on utilise ici l'addit° et l'opposé qui dans un e.v. sont bien définis.

Alors, le triplet $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, \phi)$ est un espace affine.

ensemble

e.v.

Exercice 1.5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ce qui précède s'applique en particulier à l'e.v. $\mathbb{R}^n$. Ainsi, on considère l'e.v. $\mathbb{R}^n$ et l'application suivante :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ ((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) & \longmapsto & \underbrace{(b_1-a_1, b_2-a_2,\dots,b_n-a_n)}_{\text{on oublie l'addition de } \mathbb{R}.} \end{array}$$

Note : $(b_1 \underset{\text{addit° de } \mathbb{R}}{-} a_1, \dots\dots, b_n - a_n)$

$= (b_1,\dots,b_n) \underset{\text{str. d'e.v. de } \mathbb{R}^n}{-} (a_1,\dots,a_n)$

Donc en fait, le ϕ ci-dessus est celui défini à l'ex. 1-b en exploitant la structure d'e.v. de $\mathbb{R}^n$.

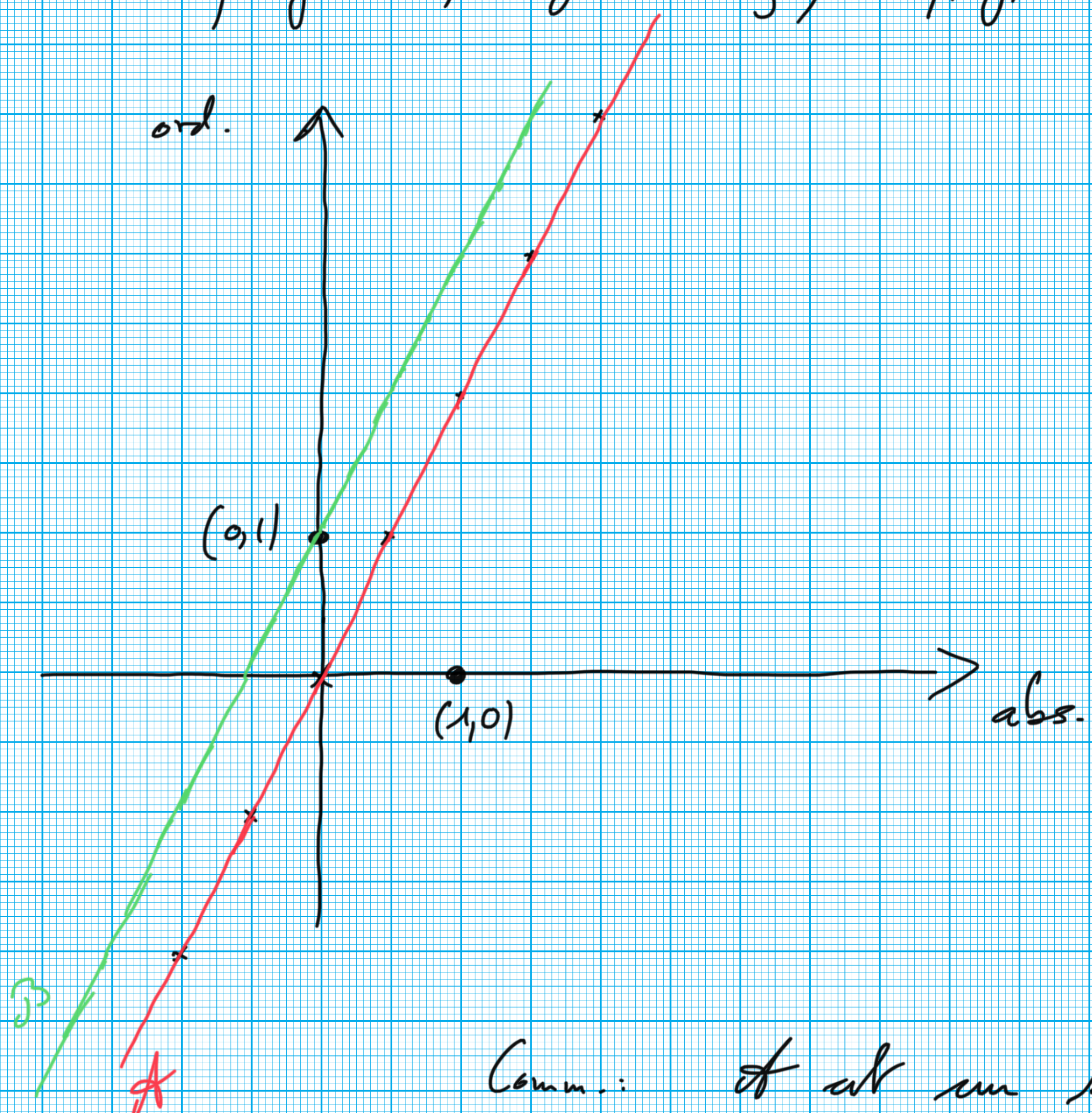
Le triplet $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \phi)$ est un espace affine.

<u>Commentaire :</u> sur le même ensemble $\mathbb{R}^n$, on a donc deux structures différentes : celle d'e.v. et celle d'esp. affine.

Exemple d'utilité de ces <u>deux</u> structures.

Dans $\mathbb{R}^2$ on peut considérer les couples (x,y) tq $y=2x$ et aussi les couples (x,y) tq $y = 2x+1$:

$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = 2x\}$; $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x+1\}$.



Comm. : $\mathcal{A}$ est un ssev de $\mathbb{R}^2$

mais $\mathcal{B}$ n'en est pas un.

En ce sens, la structure d'e.v. de $\mathbb{R}^2$ rend compte de $\mathcal{A}$, mais pas de $\mathcal{B}$. On verra bientôt que la structure d'esp. affine de $\mathbb{R}^2$ rend compte de $\mathcal{A}$ et de de $\mathcal{B}$ au sens où, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont tous les deux des ss-esp. affines de $\mathbb{R}^2$.

2. Barycentres et sous-esp. affines.

Géométrie vect. (étude des e.v.)	Géom. affine (étude des e.a.)
* comb. lin.	* barycentre
* ss-ev. (ss-ens. stable par c.l.)	* ss-esp. affine (ss-ens. stables par barycentres)
* ss ev. engendré par...	* ssesp affine engendré par...

Théo. 2.1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\{(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p)\}$ une famille de p points pondérés de E. Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \neq 0$, alors il existe un point g de E, unique, et tq

$$\alpha_1 \overrightarrow{ga_1} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{ga_p} = \vec{0}.$$

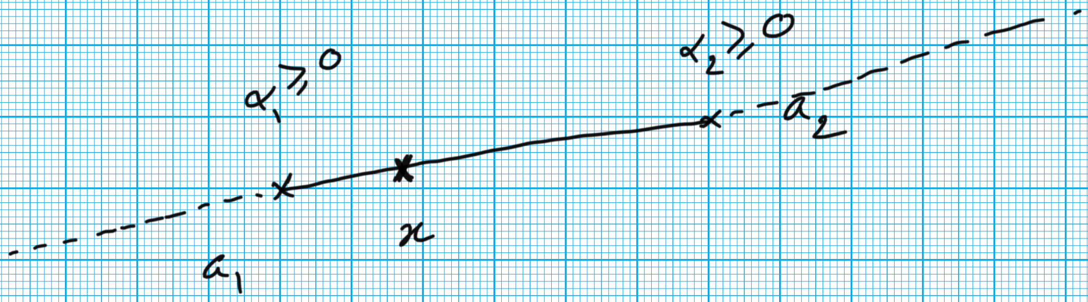
Déf. 2.2 Le point g ainsi défini est appelé le barycentre de la famille $\{(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p)\}$.

Exercice 2.3 Lu.

Déf. 2.4 Lu.

Déf. 2.5 : * le milieu de $\{a_1, a_2\}$ est son isobarycentre.

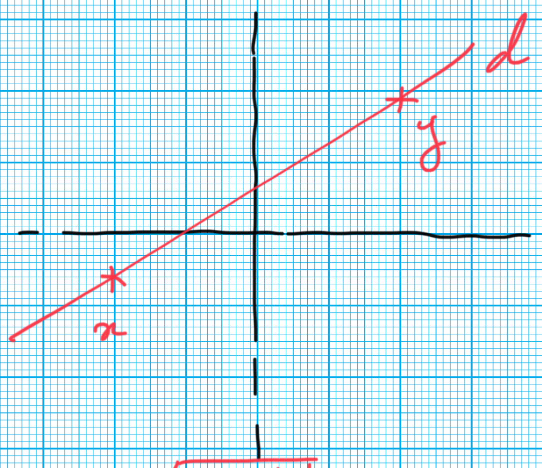
* Soient $a_1, a_2 \in E$. Le segment d'ext. a_1 et a_2 est l'ens. de tous les barycentres $\{(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2)\}$ où $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$.

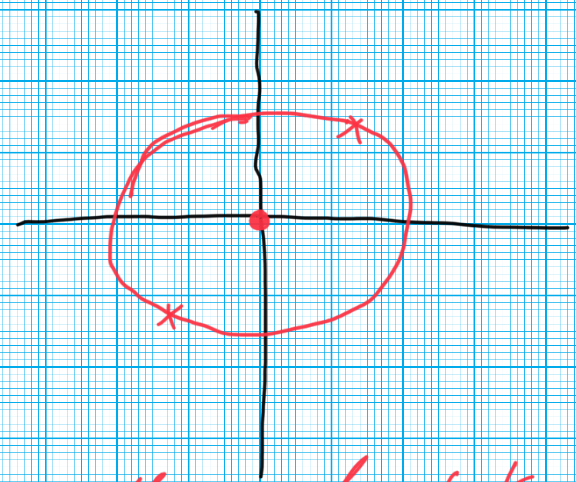


En fait, il suffit de considérer les barycentres des familles $\{(a_1, t), (a_2, 1-t)\}$.

Déf. 2.6 : Un sous-esp. affine de E est une partie non-vide stable par barycentre.

Illustration : ds $\mathbb{R}^2$ e.a. standard.

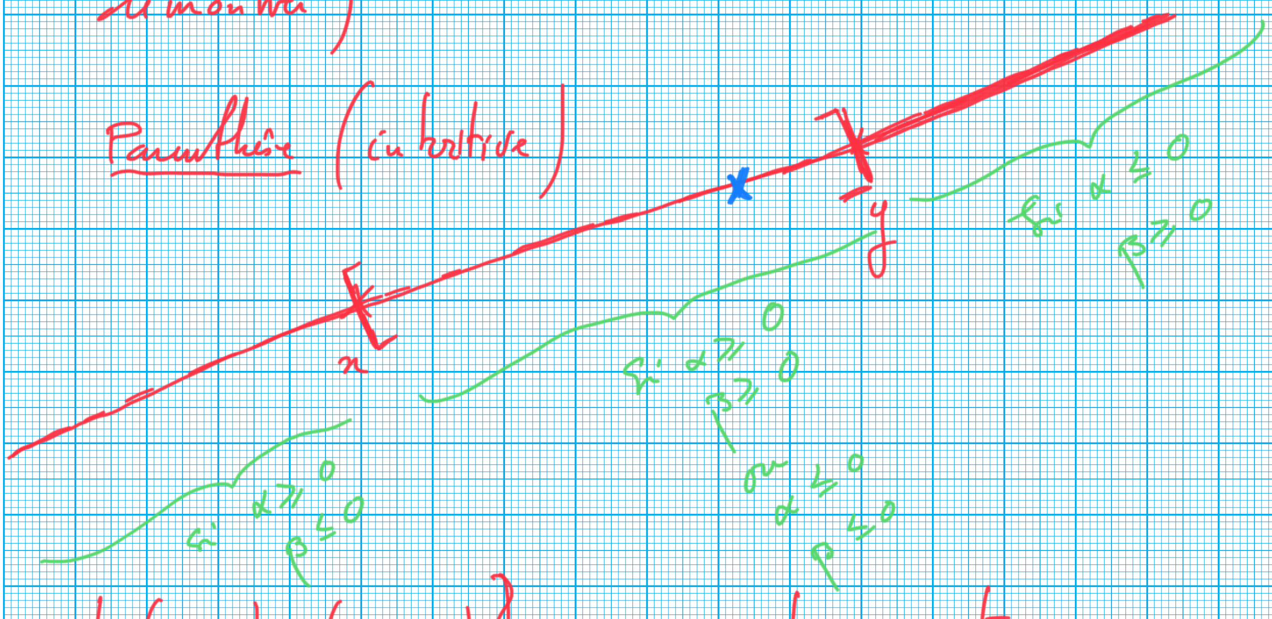




Une $\boxed{\text{droite}}$ est un ss-esp. affine (reste à démontrer)

Un cercle n'est pas un ss-esp affine.

Parenthèse (intuitive)



$\{(x,\alpha),(y,\beta)\} \rightsquigarrow$ barycentre

$\alpha+\beta \neq 0$

Théorème 2.7 Caractérisat° des ss-esp. aff.

Soit $(E, \vec{E}, \phi)$ un espace affine et soit V une partie non vide de E.

1. Soit $a \in V$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) V est un ss-esp. affine.

(ii) $\phi_a(V)$ est un sous-ev de $\vec{E}$.

2. Si V est un ss-esp. affine, et si $a, b \in V$, $\phi_a(V) = \phi_b(V)$.

Comm. :

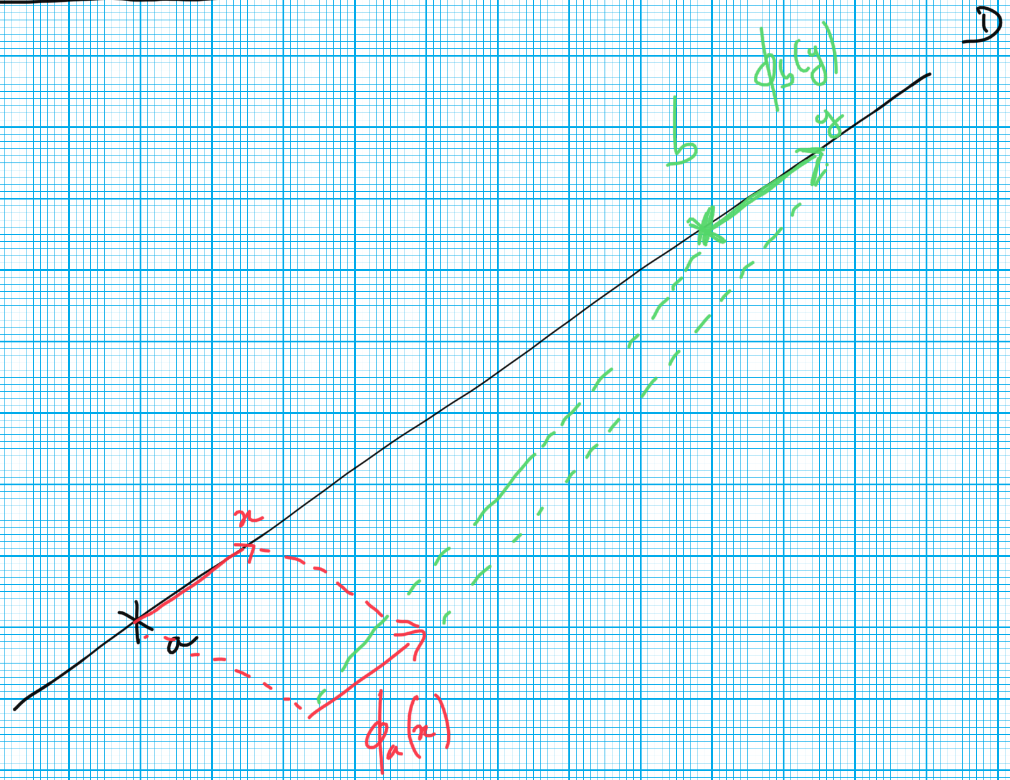
1. Le point 1 est utile pour démontrer qu'une partie V non vide est, ou n'est pas, un ssesp. affine.

   1. on choisit a ds V arbitrairement
   2. on $\tilde{c}$ $\phi_a : E \longrightarrow \vec{E}$

$$y \longmapsto \vec{ay}$$

$$V \longrightarrow \phi_a(V)$$

Illustration :



$\phi_a(\mathcal{D})$: ens. de tous les vecteurs d'origine a et d'extrémité un point de $\mathcal{D}$.