Exposé du 04/03/2021

Théorème 2.7. Soit $(E, \vec{E}, \phi)$ un e.a. et V une partie de E, $V \neq \emptyset$.

1. Si $a \in V$. Les assertions suivantes sont équiv. (i) V est un sous-esp affine
   (ii) $\phi_a(V)$ est un ssev de $\vec{E}$.
2. Soient $a, b \in V$. Si V est un ss-esp. affine de E, alors $\phi_a(V) = \phi_b(V)$.

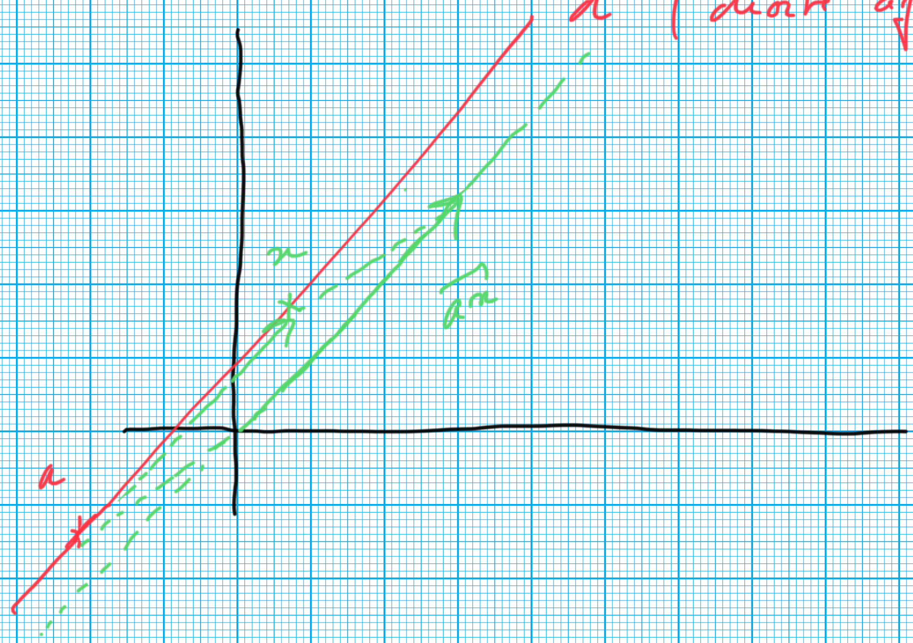
Géom. affine $\xrightarrow{\phi_a}$ Géo. Vect.

V est-il un ssea $(a \in V)$ — $\boxed{\phi_a(V)}$ est-il un ssev

Dém. Lire seul.

Définition 2.8 Soient $(E, \vec{E}, \phi)$ un e.v. et soit V un ssea de E. Pour $a \in V$, $\phi_a(V)$ est appelé la direction de V, notée $\vec{V}$.

<u>Illustration</u> : On se place ds l'e.a. $\mathbb{R}^2$ standard :



$$\phi_a : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \vec{E} \\ x & \longmapsto & \phi_a(x) = \overrightarrow{ax} \end{array}$$

ex : $d = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = x + 1 \}$

alors on trouve que $\boxed{\phi_a(d) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = x \}.}$

<u>Vérification</u> : Mq l'ensemble d est un ss-esp. affine de $\mathbb{R}^2$.

1. d est non vide (et on choisit a ds d)
2. Calculer $\phi_a(d)$ et conclure.

1) d est non vide : par exemple $(0,1) \in d$. Posons $a = (0,1)$

2) Calcul de $\phi_a(d)$. L'application ϕ_a est la suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi_a : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-0, y-1). \end{array}$$

Soit $(x,y) \in d$. On a, par déf. de d, $y = x+1$. On a $\phi_a((x,y)) = (x, y-1)$

Ainsi $\phi_a((x,y)) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$.

Ceci mq : $\phi_a(d) \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$

Considérons maintenant un vecteur (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ tq $X = Y$. Alors on a

$$\phi_a(\underline{(X, Y+1)}) = (X, Y).$$

De plus, on a :

$$Y+1 = X+1.$$

Donc $(X, Y+1) \in d$. Ceci mq le vecteur (X, Y) est l'image par ϕ_a du point $(X, Y+1)$ de d.

Ainsi, on a mq $\forall$ vecteur (X, Y) tq $X = Y$ est ds $\phi_a(d)$:

$$\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 / X = Y\} \subseteq \phi_a(d).$$

Bilan provisoire : on a mq :

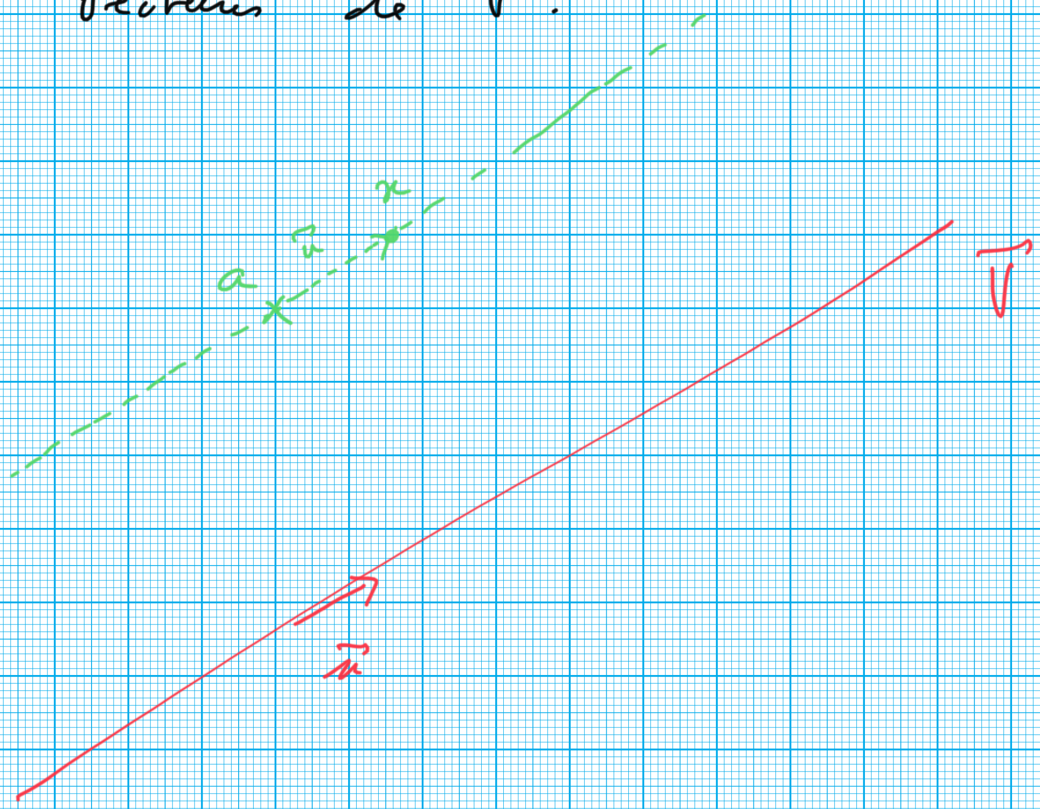
$$\phi_a(d) = \boxed{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = x\}}$$

__Mais__ l'ens. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = x\}$ est un ssev de $\mathbb{R}^2$. Le théorème 2.7 assure donc que d est un ss-esp. affine de $\mathbb{R}^2$. De plus, par définition, la direction $\vec{d}$ de l'e.a. d est la droite vectorielle $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = x\}$.

__Rmq 2.9__ Même notations ce qui précède mq :

$$V = \{a + \vec{u}, \ \vec{u} \in \vec{V}\} = \{T_{\vec{u}}(a), \ \vec{u} \in \vec{V}\}$$

__Autrement dit__ : on peut reconstruire V lorsqu'on connaît un point a de V et la direction $\vec{V}$. Plus précisément, V est l'ensemble des translatés de a par les vecteurs de $\vec{V}$.



<u>Rem. 2.10</u> Tout sev est un e.a.

<u>Commentaire</u> : On supp. $V \subseteq W$. On peut donc choisir $a \in V$ et alors $a \in W$.
Mais
$$V = \{ T_{\vec{u}}(a) \ , \vec{u} \in \vec{V} \}$$
$$W = \{ T_{\vec{u}}(a) \ , \vec{u} \in \vec{W} \}$$

Donc, si $\vec{V} = \vec{W}$, on a $V = W$.

<u>Exercice 2.11</u> On supp. donnés deux ss esp. affines V et W tq $V \subseteq W$ et $\dim(V) = \dim(W)$. <u>càd</u> <u>$\dim(\vec{V}) = \dim(\vec{W})$</u>.

Puisque $V \subseteq W$ on peut considérer $a \in V$ et alors $a \in W$. Dans ces conditions (Théo. 2.7 et Déf. 2.8),

$$\vec{V} = \phi_a(V) \qquad \text{et} \qquad \vec{W} = \phi_a(W)$$

donc $\vec{V} \subseteq \vec{W}$. Comme $\vec{V}$ et $\vec{W}$ ont même dimension, on a donc $\vec{V} = \vec{W}$. Le commentaire précédent s'applique et permet de mq $V = W$.

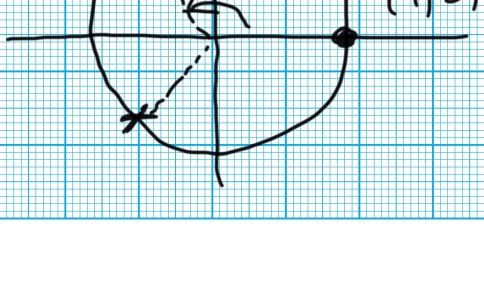
Géom. affine	Géom. Vect.
⋮	⋮
ssea	ssev.
ssea engendré par .... $\mathrm{Aff}(P)$	ssev. engendré par .... $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})$

<u>Théorème 2.14</u> L'intersection d'une famille quelconque de ssea affines est .) soit vide
..) soit un ssea.

<u>Définition 2.15</u> : Soit $(E, \vec{E}, \phi)$ un e.a.
1) Si A est une partie de E, non vide, on appelle ss-esp. affine engendré par A l'intersection de tous les ssesp affines contenant A.
2) Si $\mathcal{F}$ est une famille d'élts de E, on appelle ssesp. affine engendré par $\mathcal{F}$ le ssesp affine engendré par la partie de E sous-jacente à $\mathcal{F}$.

<u>ex</u>: On č famille indexée par $\mathbb{Z}$ d'élts de $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$\left(\left(\cos \frac{2k\pi}{3}, \sin \frac{2k\pi}{3} \right), k \in \mathbb{Z} \right).$$



Le ens. ss-jacent

$$\left\{ (1,0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}$$

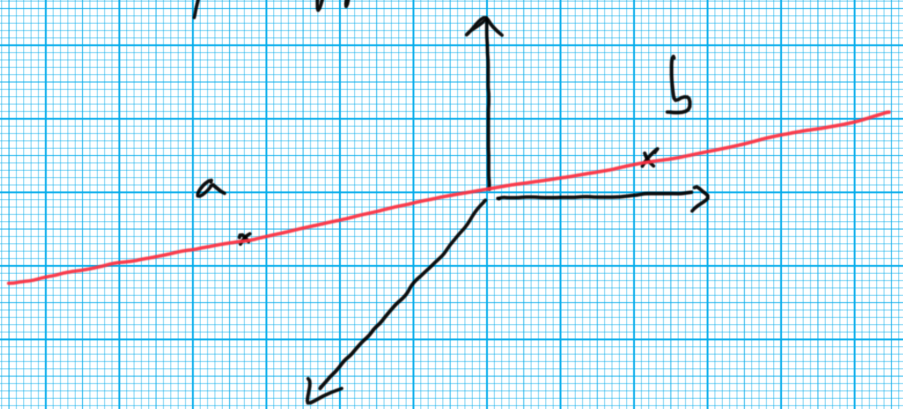
Rmq 2.16 Si A est une partie de E et si V est un ss-esp. affine contenant A, alors $\boxed{Aff(A) \subseteq V}$.

Proposition 2.17 : Soit $(E, \vec{E}, \phi)$ un e.a. et A un sous-ens. non vide de E.
1. $Aff(A)$ est l'ensemble de tous les barycentre de familles pondérées de points de A.
2. Si $a \in A$, alors

$$\overrightarrow{Aff(A)} = \mathrm{Vect}\Big(\phi_a(A)\Big).$$

Dém. A lire seul.

Illustration du point 1 : On se place ds l'esp. affine $\mathbb{R}^3$ standard.



$A = \{a, b\}$

$a \neq b$

D'après la Prop. 2.17, pour construire $\mathrm{Aff}(A)$ il faut considérer tous les syst. pondérés de points de la forme $\{(a,\alpha),(b,\beta)\}$ avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha+\beta \neq 0$. Intuitivement, on obtient donc que $\mathrm{Aff}(A)$ est "la droite passant par a et b".

__Illustration du point 2.__

$$
\begin{tikzcd}
\text{Géom. affine} \arrow[rr, squiggly, "\phi_a"] & & \text{Géom. Vect.} \\
a \in A \arrow[d, squiggly, "\mathrm{Aff.}"'] \arrow[rr, squiggly] & & \phi_a(A) \arrow[d, squiggly, "\mathrm{Vect}"] \\
\mathrm{Aff}(A) \arrow[rr] & & \boxed{\begin{array}{c} \mathrm{Vect}(\phi_a(A)) \\ \parallel \\ \phi_a(\mathrm{Aff}(A)) \end{array}}
\end{tikzcd}
$$

Vectorialisation en a

Exemple 2.18 $(E, \vec{E}, \phi)$ un e.a.

Rappel : on appelle droite affine un ss-esp. affine de dim. 1 càd que une droite affine, par déf., est un ssea V de E tq $\dim(V) = 1$.

1. Si x et y sont des points distincts de E, $\mathrm{Aff}(\{x, y\})$ est une droite dont la direction est $\mathbb{R}\vec{xy} \subseteq \vec{E}$.

Démontrons cela.

On $\tilde{c}$ $\mathrm{Aff}(\{x,y\})$. Le second point de la Prop. 2.17 nous dit que

$$\overrightarrow{\mathrm{Aff}(\{x,y\})} = \mathrm{Vect}\{\phi_x(A)\} \quad (*)$$

Or :

$$\begin{aligned} \phi_x : E &\longrightarrow \vec{E} \\ z &\longmapsto \vec{xz} \end{aligned}$$

Donc $\phi_x(A) = \{\vec{0}, \vec{xy}\}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{Aff}(\{x,y\})} &= \mathrm{Vect}\{\vec{0}, \vec{xy}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{\vec{xy}\} = \mathbb{R}\vec{xy}. \end{aligned}$$

On appelle $\mathrm{Aff}(\{x,y\})$ la droite affine passant par x et y. Elle est notée (xy).

2. Réciproquement : si D est une droite affine et si x, y st des élts distincts de D, alors $D = (xy)$.

<u>Théorème 2.19</u> Soit $(E, \vec{E}, \phi)$ un e.a. et V et W deux ss-esp affines de dim. finie.

1. Si $V \cap W = \emptyset$, alors $\mathrm{Aff}(V \cup W)$ est de dimension $\dim(\vec{V} + \vec{W}) + 1$.
2. Si $V \cap W \neq \emptyset$, alors $\mathrm{Aff}(V \cup W)$ est de dimension $\dim(\vec{V} + \vec{W})$.

<u>Dém.</u> Exercice. ∎

<u>Exercice 2.20</u>

1. On se place ds l'e.a. $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure standard. On considère deux droites D_1 et D_2. Autrement dit, D_1 et D_2 sont des ssea tq $\dim(\vec{D_1}) = 1$

et $\dim(\mathcal{D}_2) = 1$.

<u>1^{er} Cas</u> $\quad \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$.

On a $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$. De plus, $\mathcal{D}_1$ est un ss-esp. affine. Pcq

$\supseteq$ tjs vrai (cf Déf. ou Prop. 2.17)

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1.$$

$\subseteq$ vrai (cf. Déf.) pcq $\mathcal{D}_1$ est un sea.

Et dc $\quad \mathrm{Aff}(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$.